Un microscopio al calcolatore per gettare uno sguardo sul più complesso fra gli oggetti della matematica

di A. K. Dewdney

Le Scienze n. 206 - Ottobre 1985

L'insieme di Mandelbrot si colloca, nella sua silenziosa complessità, al centro di una vasta distesa bidimensionale di numeri detta piano complesso. Quando si applica ripetutamente ai numeri una certa operazione, quelli all'esterno dell'insieme fuggono all'infinito, mentre quelli all'interno vanno alla deriva ondeggiando qua e là. Vicino al margine, una minuta coreografia di oscillazioni segna l'inizio dell'instabilità. :L un regresso infinito di dettagli che ci colpisce per la sua varietà, la sua complessità e la sua strana bellezza.

L'insieme prende nome da Benoit B. Mandelbrot, ricercatore al Thomas J. Watson Research Center della IBM a Yorktown Heights, New York. Partendo dal suo lavoro sulle forme geometriche, Mandelbrot ha sviluppato un campo che ha chiamato geometria frattale, lo studio matematico di forme con dimensione frazionare. In particolare, il confine dell'insieme di Mandelbrot è un frattale, ma è anche molto di più.

Con l'aiuto di un programma relativamente semplice, un calcolatore può essere trasformato in una specie di microscopio per osservare il confine dell'insieme di Mandelbrot. In linea di principio, si può effettuare uno "zoom" su qualsiasi parte dell'insieme, con qualsiasi ingrandimento (si vedano le illustrazioni). Da una certa distanza, l'insieme assomiglia ad un tozzo otto, coperto di protuberanze e sdraiato sul fianco. L'interno della figura è sinistramente nero. Intorno c'è un alone di color bianco elettrico, che cede il posto a profondi blu e neri nelle zone esterne del piano.

Avvicinandosi all'insieme di Mandelbrot, si scopre che ogni protuberanza è una sottile figura di forma molto simile a quella della figura genitrice. Zoomando ancora di più su una di queste sottili figure, però, ci si accorge che si tratta di una configurazione del tutto diversa: una miriade di filamenti arricciati e annodati, dall'aspetto organico, si estende in file e spirali. Ingrandendo un ricciolo, ci si rivela, tuttavia, un'altra scena: esso è costituito da coppie di spirali unite da ponti di filigrana. Un ponte rivela all'ingrandimento la presenza di due riccioli che spuntano dal suo centro. Al centro di questo centro, per così dire, si trova un ponte a quattro direzioni con altri quattro riccioli, al centro dei quali si trova un'altra versione dell'insieme di Mandelbrot.

Quello della versione ingrandita non è proprio lo stesso insieme di Mandelbrot. Continuando a zoomare, sembra che riappaiano gli stessi oggetti, ma un'osservazione più accurata rivela sempre le differenze. La cosa procede così all'infinito, infinitamente varia e spaventosamente bella.

Descriverò due programmi per calcolatore che esplorano gli effetti di operazioni ripetute come quella che porta all'insieme di Mandelbrot. Il primo programma ha generato le figure a colori che compaiono nell'articolo di questo mese ed è adattabile per calcolatori personali che abbiano hardware e software adeguati per la grafica. Creerà immagini soddisfacenti anche se si dispone solo di una unità video monocromatica. Il secondo programma è per i lettori che, come me, hanno bisogno di abbandonare per un po' la complessità dell'infinito per rifugiarsi nell'evidente semplicità del finito.

La parola "complesso" qui viene usata in due significati: il significato comune è ovviamente adeguato per descrivere l'insieme di Mandelbrot, ma la parola ha anche un secondo significato più tecnico. Un numero si dice complesso quando è costituito di due parti, che, per ragioni storiche, si chiamano parte reale e parte immaginaria. Questi due termini non hanno più alcun significato specifico: le. Due parti di un numero complesso si potrebbero anche chiamare Humpty e Dumpty. *7 + 4 i* è un numero complesso con parte reale 7 (Humpty) e parte immaginaria 4i (Dumpty). La *i* vicino al quattro indica quale parte del numero complesso è immaginaria.

Ogni numero complesso può essere rappresentato da un punto sul piano e il piano dei numeri complessi è chiamato piano complesso.

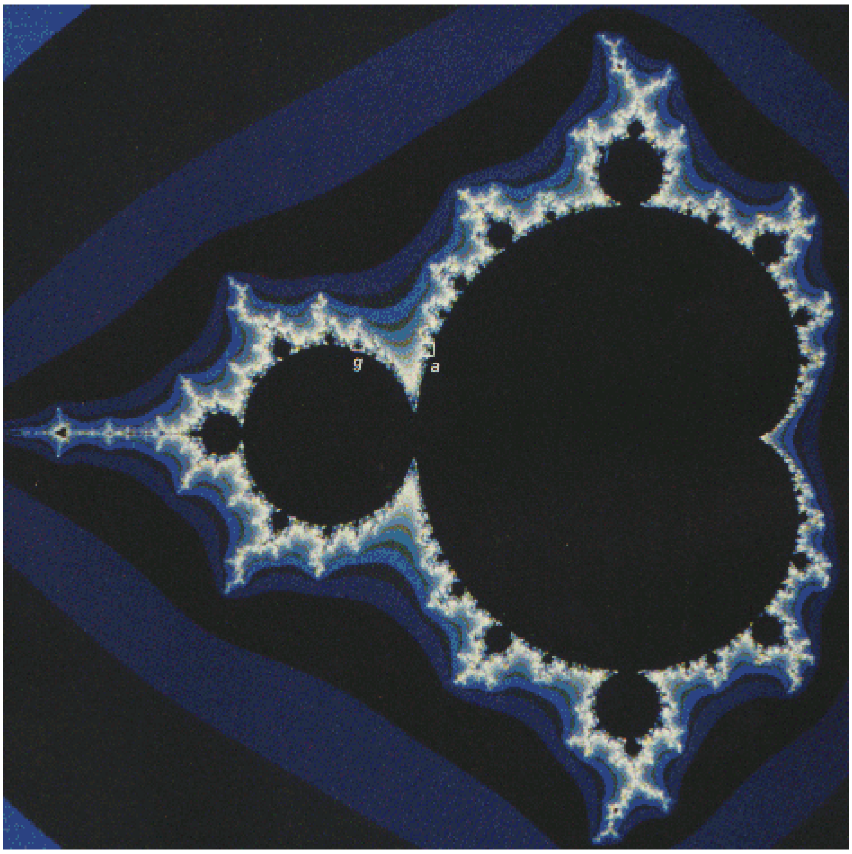
Per trovare *7 + 4 i*, si parte dal numero complesso 0, o *0 + 0i*, e si misurano sette unità a est e quattro unità a nord: il punto risultante rappresenta *7 + 4* i. Il piano complesso è composto da un'infinità non numerabile di numeri di questo genere. Le loro parti reali e quelle immaginarie possono essere positive o negative e possono essere numeri interi o sviluppi decimali.

Sommare o moltiplicare due numeri complessi è facile. Per sommare *3 - 2 i* e *7 + 4i*, si sommano le parti separatamente e il risultato è *10 + 2 i*. Moltiplicare numeri complessi è solo un po' più difficile. Per esempio, se si tratta il simbolo i come la x dell'algebra, il prodotto di *(3 - 2i)* e *(7 + 4i)* *è* $(21 + 12i - 14i - 8i^2)$. A questo punto bisogna mettere in gioco una particolare proprietà del simbolo i (unità immaginaria): i^2 è uguale a -1. Il prodotto può essere quindi semplificato raccogliendo le parti reali e immaginarie: *(29 - 2i).* Ora è possibile descrivere il processo iterativo che genera l'insieme di Mandelbrot. Si inizia con l'espressione algebrica $z^2 + c$, dove z è un numero complesso che può variare e c è un numero complesso prefissato. Poniamo inizialmente z uguale al numero complesso 0. Il quadrato di z è allora 0 e il risultato della somma di c con z^2 è semplicemente c. Sostituiamo ora questo risultato a z nell'espressione $z^2 + c$. La nuova somma (c^2+c). Sostituiamo di nuovo z e la somma successiva

è $(c^2+c)^2+c$. Continuiamo il procedimento, ponendo sempre come ingresso per il nuovo passo il risultato del passo precedente.
Avvengono strane cose quando le iterazioni riguardano particolari valori di c. Ecco quello che avviene, per esempio, quando c è $1 + i$:

Prima iterazione, $1 + 3i$
Seconda iterazione, $- 7 + 7i$
Terza iterazione, $1 - 97i$

Si noti che le parti reali e quelle immaginarie possono crescere, diminuire o cambiare segno. Se questo processo continua, i numeri complessi che ne risultano diventano progressivamente più grandi.
Che cosa si intende, esattamente, per dimensione di un numero complesso? Dato che i numeri complessi corrispondono a punti del piano, possiamo far intervenire il concetto di distanza. La dimensione di un numero complesso non è altro che la sua distanza dal numero complesso 0. Quella distanza è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui lati sono la parte reale e quella immaginaria del numero complesso. Per trovare la dimensione del numero complesso, quindi, bisogna elevare al quadrato le sue parti, sommare i due quadrati ed estrarre la radice quadrata della somma. Per esempio, la dimensione del numero complesso $7 + 4$ i è la radice quadrata di $7^2 + 4^2$, ossia circa 8,062. Quando i numeri complessi raggiungono una certa dimensione, nel corso del processo iterativo che ho appena descritto, crescono molto rapidamente: dopo poche altre iterazioni superano la capacità di qualsiasi calcolatore.
Fortunatamente, posso ignorare tutti i numeri complessi c che corrono all'impazzata verso l'infinito. L'insieme di Mandelbrot è l'insieme di tutti i numeri complessi c per i quali la dimensione di $z^2 + c$ è finita anche dopo un numero indefinitamente grande di iterazioni. Il programma che sto per descrivere ricerca per l'appunto questi numeri. Sono debitore per tutto questo a John H. Hubbard, un matematico della Cornell University, che è un'autorità per quanto riguarda l'insieme di Mandelbrot ed è stato uno dei primi a costruirne un'immagine al calcolatore. La maggior parte



L’insieme di Mandelbrot, oscuro abitatore del campo complesso

delle immagini di questo articolo sono state prodotte da Heinz-Otto Peitgen e dai suoi colleghi dell'Università di Brema, utilizzando gli insegnamenti impartiti a Peitgen da Hubbard. II programma di Hubbard è servito da ispirazione per un programma che io chiamo MANDELZOOM. Il programma predispone una matrice detta fig, necessaria per salvare le figure. Le entrate di fig sono elementi d'immagine distinti, chiamati pixel, disposti secondo una configurazione a griglia. La matrice di Hubbard ha 400 colonne e 400 righe e quella di Peitgen è ancora più grande. I lettori che vogliano adattare MANDELZOOM per uso personale devono scegliere una matrice adeguata alla loro apparecchiatura e al loro carattere. Più grandi sono le matrici più lunghi sono i tempi d'attesa per le immagini, ma migliore è la risoluzione.

Nella prima parte di MANDELZOOM si deve scegliere la regione quadrata del piano complesso da esaminare. L'angolo sud-ovest del quadrato va indicato con il numero complesso a cui corrisponde. Due variabili del programma, angoloa e angolob, consentono di introdurre, rispettivamente, la parte reale e quella immaginaria del numero. Va poi specificata la lunghezza di ciascun lato del quadrato introducendo un valore per una variabile detta lato.
La seconda parte del programma mette in corrispondenza la matrice fig con il quadrato che interessa, calcolando la dimensione di una variabile detta gap, che indica la distanza all'interno del quadrato tra pixel adiacenti. Per ottenere gap, si divide lato per il numero di righe (o colonne) di fig.
La terza parte costituisce il cuore del programma. Viene effettuata una ricerca dei numeri complessi c dell'insieme di Mandelbrot e vengono assegnati colori ai numeri che sono, in un particolare senso, vicini. Il procedimento deve aver luogo per ogni pixel; la matrice 400 per 400 di Hubbard, quindi, richiede 160 000 calcoli separati. Poniamo che il programma stia attualmente lavorando sul pixel della riga m e della colonna

n; la terza parte si divide in quattro passi:

1) Calcolare un numero complesso c che si presuppone rappresenti il pixel: sommare n*gap ad angoloa per ottenere la parte reale ac di c; sommare m*gap ad angolob per ottenere la parte immaginaria bc di c. Non è necessario includere nel programma il numero immaginario i.
2) Porre inizialmente uguale a *0 + 0i* una variabile complessa z (con parti az e bz). Porre uguale a 0 una variabile intera detta contatore.
3) Compiere ripetutamente i seguenti tre passi finché la dimensione di z supera 2 oppure la dimensione di contatore supera 1000:

$$z = -z^2 + c$$

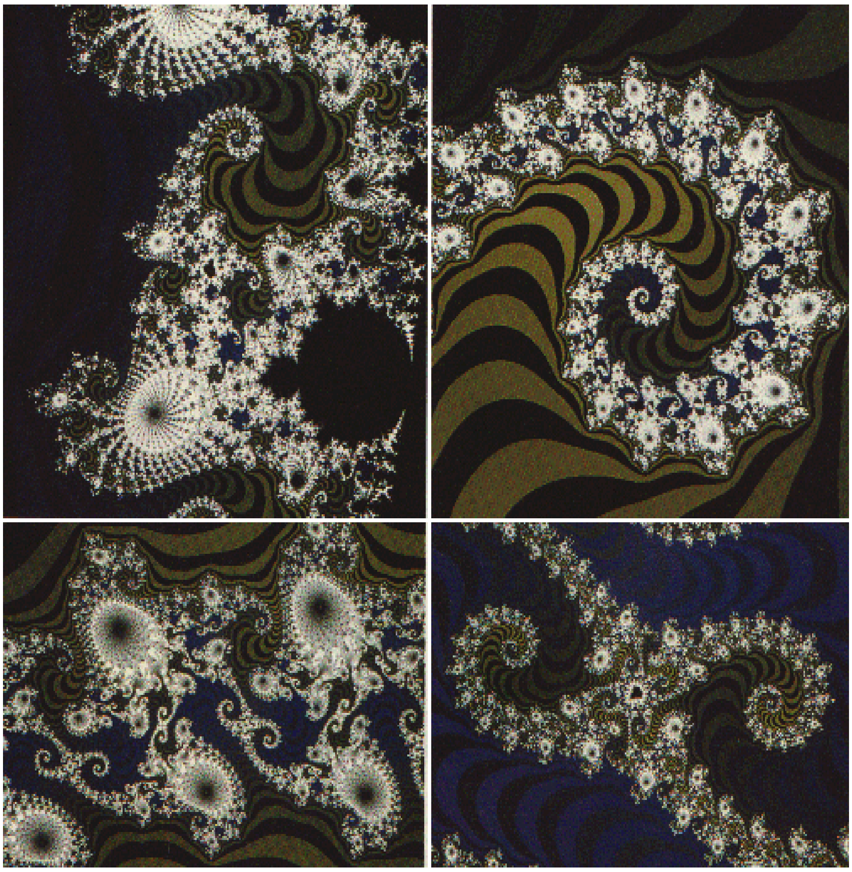
contatore = contatore + 1

dimensione = dimensione di z

Perché il numero 2 è così importante? La teoria delle iterazioni di numeri complessi garantisce che le iterazioni porteranno z all'infinito se e solo se in qualche stadio z raggiunge una dimensione pari o superiore a 2. Risulta che un numero relativamente grande di punti con destino infinito raggiunge 2 dopo solo poche iterazioni. I loro cugini più lenti diventano sempre più rari a valori superiori della variabile contatore.

4) Assegnare un colore a fig (m, n), secondo il valore raggiunto da contatore alla fine del passo 3. Mostrare sullo schermo il colore del pixel corrispondente. Si noti che il colore di un pixel dipende solo da un numero complesso all'interno del suo piccolo dominio, vale a dire quello al suo angolo nord-est; il comportamento di questo numero rappresenta allora il comportamento dell'intero pixel.

Lo schema per l'assegnazione dei colori richiede che il dominio dei valori di contatore raggiunti nella matrice sia raggruppato in sottodomini, uno per ogni colore. I pixel per i quali la dimensione di z raggiunge 2 dopo solo poche iterazioni sono in rosso. I pixel per i quali la dimensione di z raggiunge 2 dopo un numero relativamente elevato di iterazioni sono in violetto all'estremità opposta dello spettro. I pixel per i quali la dimensione di z è inferiore a 2 anche dopo 1000 iterazioni si presuppone che stiano nell'insieme di Mandelbrot e sono in nero.



Successivi ingrandimenti del "bastone da pastore"

E sensato lasciare non specificati i colori finché non si è determinato il dominio dei valori di contatore in un particolare quadrato. Se il dominio è piccolo, si può assegnare l'intero spettro di colore all'interno di quel dominio. Hubbard propone che nel passo quattro si assegni solo il valore di contatore a ogni elemento della matrice fig. Un programma separato può poi esplorare la matrice, determinare i valori alti e bassi di contatore e assegnare di conseguenza lo spettro, I lettori che vogliano seguire questa strada troveranno certo schemi adatti.

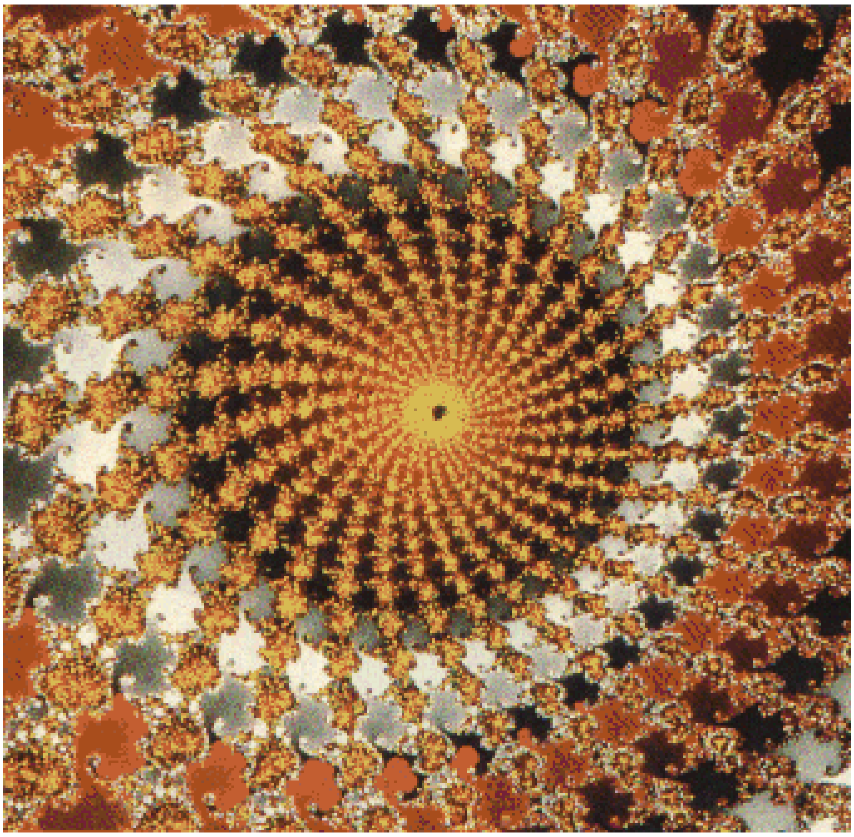
Il lettore che non disponga di un monitor a colori può lavorare anche in bianco e nero. I numeri complessi per i quali z è maggiore di 2 dopo r iterazioni sono in bianco; gli altri sono in nero. r può essere scelto a proprio piacimento. Per evitare di dover far girare il programma per intere notti la matrice può essere, diciamo, di 100 righe per 100 colonne. Secondo Hubbard è del tutto ragionevole ridurre il numero massimo di iterazioni per punto da 1000 a 100. Il risultato di un programma del genere è una suggestiva immagine a punti della sua controparte.

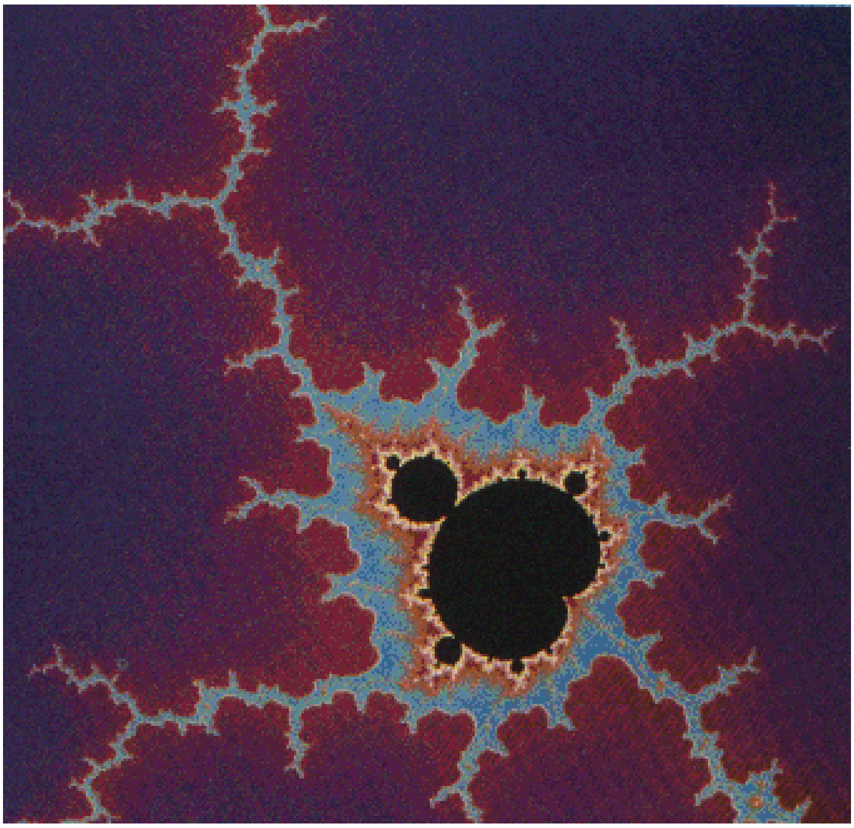
Che potenza ha la "lente zoom" di un calcolatore personale? In qualche misura dipende dall'effettiva dimensione dei numeri che la macchina può manipolare. Per esempio, secondo Magi (il mio amanuense dei microcalcolatori alla University of Western Ontario), il PC IBM utilizza il microelaboratore 8088, un chip prodotto dalla Intel Corporation e progettato per manipolare numeri a 16 bit. Con il procedimento detto della doppia precisione è possibile portare la lunghezza dei numeri a 32 bit. Magi e io abbiamo cal colato che si possono realizzare ingrandimenti dell'ordine di 100 000 volte. Software di maggior precisione, che permette in effetti di concatenare questi gruppi di bit, può far arrivare la precisione numerica a centinaia di cifre significative, L'ingrandimento dell'insieme di Mandelbrot che si può teoricamente raggiungere è molto maggiore dell'ingrandimento necessario per risolvere il nucleo dell'atomo.

Dove si dovrebbe esplorare il piano complesso? Vicino all'insieme di Mandelbrot, naturalmente, ma dove precisamente? Hubbard afferma che "ci sono zilioni di bellissimi punti". Come un turista in una terra di infinita bellezza, trabocca di suggerimenti sui posti che i lettori potrebbero voler esplorare. Non hanno nomi come Hong Kong o Isfahan: "Provate con l'area che ha parte reale compresa tra 0,26 e 0,27 e parte immaginaria compresa tra 0 e 0,01". Propone anche altre due località:

Parte reale	Parte immaginaria
da -0,76 a -0,74	da 0,01 a 0,03
da -1,26 a -1,24	da 0,01 a 0,03

Il lettore che esamini le immagini a colori che accompagnano questo articolo dovrà tenere ben presente che tutti i punti di colore diverso dal nero non appartengono all'insieme di Mandelbrot. La bellezza sta in gran parte nell'alone di colori assegnati ai punti in fuga. In effetti, se si dovesse vedere l'insieme isolato, la sua immagine non sarebbe forse così piacevole: l'insieme è tutto coperto di filamenti e di versioni in miniatura di se stesso.
In realtà, nessuno dei Mandelbrot in miniatura è una copia esatta dell'insieme genitore e nessuno di essi è esattamente uguale a un altro. Vicino all'insieme genitore ci sono ancor più Mandelbrot in miniatura, che sembrano liberamente sospesi nel piano complesso. L'apparenza è però ingannevole. Hubbard e un suo collega, Adrian Donady dell'Università di Parigi, hanno dimostrato un sorprendente teorema secondo il quale l'insieme di Mandelbrot è connesso. Quindi anche i Mandelbrot in miniatura, che sembrano sospesi nel piano, sono collegati con filamenti all'insieme genitore. Le miniature si trovano quasi dappertutto vicino all'insieme genitore e sono di tutte le dimensioni.





Un occhio composito e un Mandelbrot in miniatura

Ogni quadrato della regione ne racchiude un numero infinito, di cui nel migliore dei casi solo qualcuno è visibile a un qualsiasi ingrandimento dato. Secondo Hubbard, l'insieme di Mandelbrot è "l'oggetto più complicato della matematica".