GIOCHI MATEMATICI

di Martin Gardner

Le Scienze 136 – Dicembre 1979

L'immaginabilità dei numeri immaginari

In una rubrica sui numeri negativi dell'ottobre 1977 ho parlato di quanto tempo c'è voluto e di quanto sia stato doloroso per i matematici estendere la definizione di «numero» fino a includere i numeri negativi. La cosa si ripeté e l'angoscia fu ancora maggiore quando i matematici scoprirono l'enorme utilità di quelli che vennero infelicemente chiamati numeri immaginari. E' una storia strana e bella.

Benché esistessero alcune dichiarazioni precedenti circa l'impossibilità per le quantità negative di avere radici quadrate (perché il quadrato di qualsiasi numero reale deve essere positivo), la storia dei numeri immaginari inizia realmente nell'Europa del sedicesimo secolo. A quell'epoca i matematici, in particolare l'italiano Raffaele Bombelli, trovarono spesso utile nel risolvere i problemi algebrici ipotizzare che i numeri negativi avessero radici quadrate. In altre parole, proprio come l'equazione x + 1 = 0 poteva essere risolta solo ponendo x=-1, così $x^2 + 1 = 0$ poteva essere risolta solo ponendo $x = \sqrt{-1}$

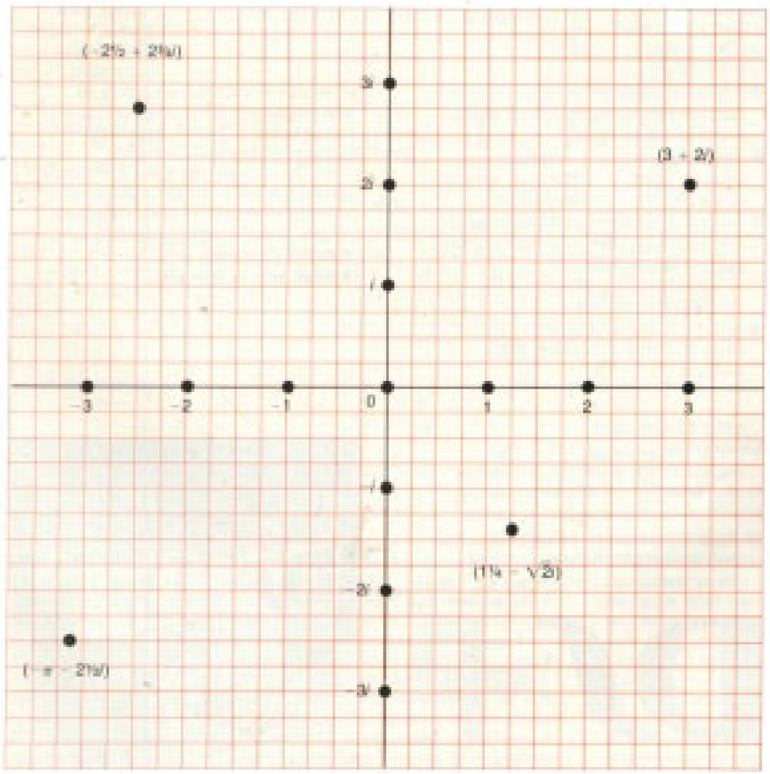
L'ipotesi apparentemente assurda che ci fosse una radice quadrata di -1 veniva giustificata su basi pragmatiche: semplificava certi calcoli e pertanto poteva venire usata fintanto che alla fine si ottenevano valori «reali». L'analogia con le regole relative all'uso dei numeri negativi è sorprendente: se state cercando di determinare quante mucche ci sono in un campo (cioè, se state operando nel dominio degli interi positivi), potete trovare i numeri negativi utili per il calcolo, ma ovviamente la risposta finale deve essere in termini di numeri positivi perché non esistono mucche negative.

Nel corso del diciassettesimo e diciottesimo secolo i matematici continuarono a scoprire nuovi usi delle radici quadrate dei numeri negativi. Fu Eulero a introdurre, nel diciottesimo secolo, il simbolo i (la prima lettera della parola latina imaginarius) per indicare $\sqrt{-1}$. Un famoso enunciato attribuito a Eulero afferma che tali radici non sono uguali, maggiori o minori di nulla, ma strettamente immaginarie o impossibili. I matematici infine elaborarono le regole algebriche per operare con gli «immaginari puri» (il prodotto di i per numeri reali) e con quelli che in seguito vennero chiamati numeri complessi (la somma di numeri immaginari puri e numeri reali).

Un numero complesso ha la forma

a* +*bi

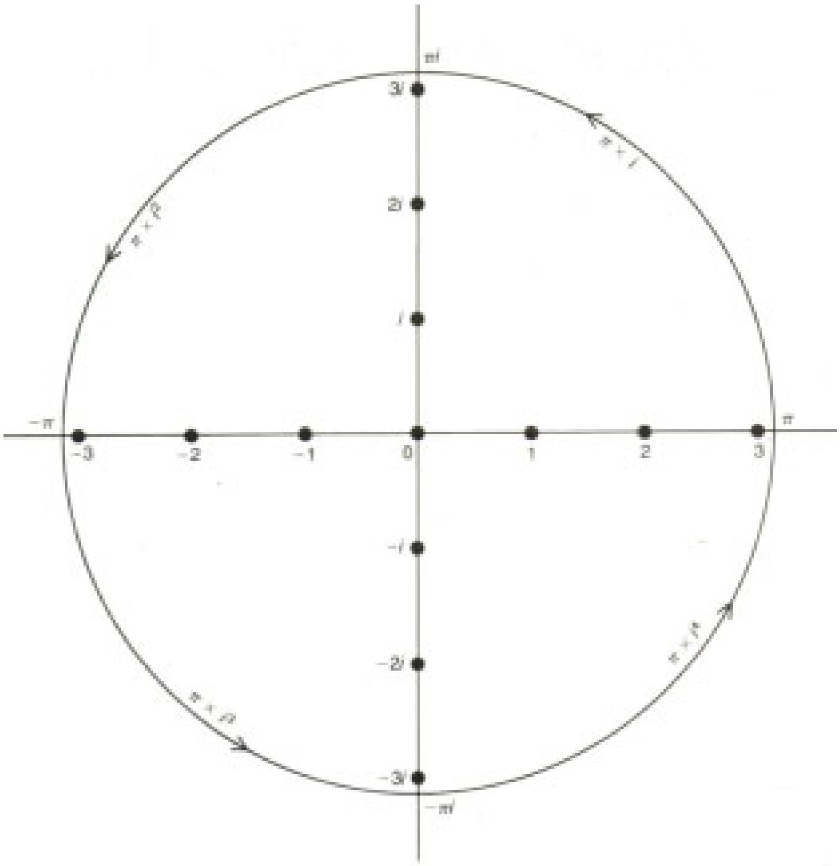
dove **a** e **b** possono essere un qualsiasi numero reale. (In questo caso il segno + non è usato nel modo familiare per indicare l'addizione; serve unicamente a separare nel numero complesso la parte immaginaria **bi** da quella reale **a**.) In altre parole, se **a** è uguale a 0 e **b** non è uguale a 0, il numero complesso è un numero immaginario puro **bi**. Se **b** è uguale a 0 **bi** si elimina e rimane il numero reale **a**. Pertanto i numeri complessi includono come sottoinsiemi tutti i reali e tutti gli immaginari puri, proprio come i numeri reali includono tutti gli interi, le frazioni e gli irrazionali. Detto in termini moderni. i numeri complessi formano la struttura matematica detta campo i cui elementi obbediscono a tutte le note leggi dell'aritmetica. Il campo dei numeri complessi è inoltre chiuso rispetto all'addizione. la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, cioè, applicando tali operazioni a due qualsiasi numeri complessi, si otterrà sempre un altro numero del campo. In un certo senso la scoperta del campo dei numeri complessi completa l'algebra tradizionale perché rende possibile la soluzione di qualsiasi equazione algebrica. li campo è risultato anche chiuso rispetto a tutte le operazioni dell'analisi e questa scoperta ha fatto sorgere



Corrispondenza tra numeri complessi e punti sul piano complesso.

un ampio edificio matematico riguardante le funzioni di variabile complessa.
Molti dei progressi della fisica moderna non si sarebbero ottenuti senza l'estensione dell'algebra al campo complesso. Il primo a fare un uso scientifico importante dei numeri complessi fu Charles Proteus Steinmetz che li trovò essenziali per eseguire in modo efficiente i calcoli sulla corrente alternata. Oggi nessun ingegnere elettronico può farne a meno e neppure nessun fisico che si occupi di aerodinamica o di dinamica dei fluidi. Tali numeri ricoprono un ruolo fondamentale anche nella teoria della relatività (dove lo spazio-tempo è reso simmetrico dallo stratagemma di considerare reali le tre dimensioni spaziali e immaginaria quella temporale), nella meccanica quantistica e in molte altre branche della fisica moderna.
Dato che esistono ancora timori a definire **i** un numero, non è infrequente che ancora oggi un fisico, un filosofo o persino un matematico asseriscano che **i** non è veramente un numero, ma soltanto il simbolo di un'operazione che spiegherò più avanti. Chi ha spazzato via nel modo più efficace possibile questo cavillo verbale è stato Alfred North Whitehead, che, nel capitolo dedicato ai numeri immaginari della sua "*Introduzione alla matematica*", ha scritto:

«A questo punto può essere utile osservare che alcune grandi menti preoccupano continuamente se stesse e gli altri ponendo in discussione l'applicabilità dei termini tecnici. E' corretto chiamare numeri i numeri incommensurabili? I numeri positivi e negativi sono realmente numeri? Sono davvero immaginari i numeri immaginari, e sono proprio numeri? ecco alcune delle futili domande che ci si pone. Bisogna capire con chiarezza che nella scienza i termini tecnici sono nomi assegnati arbitrariamente, proprio come avviene per i nomi dei bambini. 1 nomi non possono essere sbagliati o giusti. Possono al più essere appropriati o inappropriati: possono essere facili da ricordare o suggerire qualche importante idea. Una chiara enunciazione dell'essenziale principio in questione si ha nel Paese delle meraviglie, quando Coccobello dice ad Alice, a proposito del modo in cui egli usa le parole: "Le pago un po' di più e le faccio significare quello che voglio." Non ci preoccuperemo quindi di sapere se i numeri immaginari sono immaginari. o se sono numeri, ma prenderemo l'espressione come il nome di una certa idea matematica che cercheremo ora di chiarire».



Procedura per la moltiplicazione di π per i, i^2 e i^3.

Il comportamento dei numeri complessi è così simile a quello dei numeri ordinari quando vengono sommati, sottratti, moltiplicati e divisi (secondo le regole del campo complesso) che la maggior parte dei matematici non esita più a chiamarli numeri e ritiene che essi abbiano lo stesso grado di «realtà» dei numeri negativi. Anche i numeri naturali sono solo simboli manipolati secondo le regole di un sistema deduttivo. Li consideriamo più «reali» degli altri numeri solo per la stretta connessione tra le loro applicazioni e la nostra esperienza pratica del contare dita, mucche, persone e così via. Ci dimentichiamo con questo che solo le dita, le mucche e le persone sono reali, non i simboli che utilizziamo per contarle. Nel regno della matematica pura, i è altrettanto reale di 2. Se vogliamo, possiamo pensare a 2 come a un semplice operatore: un simbolo che ci dice di raddoppiare l.
La maggior parte delle persone, però, è così abituata a lavorare con i numeri reali da sentirsi molto sollevata quando scopre che esiste una semplice interpretazione geometrica dei numeri complessi. Questa interpretazione, che ci rende facile «vedere» che cosa sono i numeri, identifica ogni numero complesso con un punto del piano cartesiano. Il primo a fare questa ingegnosa connessione fu un ispettore autodidatta norvegese, Caspar Wessel, che ne diede comunicazione nel 1797. Qualche anno dopo l'idea venne ripresa da Jean Robert Argand, un contabile svizzero (che pubblicò un libretto al proposito nel 1806), e, indipendentemente, dal grande matematico tedesco Carl Friederich Gauss.
Come si vede nella figura della pagina precedente, l'idea base consiste nel considerare l'asse orizzontale del piano cartesiano come la retta dei numeri reali e l'asse verticale come la retta dei punti che corrispondono ai numeri immaginari puri. In altre parole, si stabiliscono corrisponden-

ze biunivoche tra i numeri reali e i punti sull'asse delle x e tra i numeri immaginari puri e i punti sull'asse delle y. Come ho già detto, questi due insiemi possono essere entrambi considerati sottoinsiemi dei numeri complessi; ora i restanti numeri complessi possono essere posti in corrispondenza con i restanti punti del piano. Per ottenere le coordinate del punto associato a un numero complesso basta misurare la parte reale sull'asse reale e la parte immaginaria sull'asse immaginario. Nelle figura si vedono i punti corrispondenti a quattro numeri complessi.

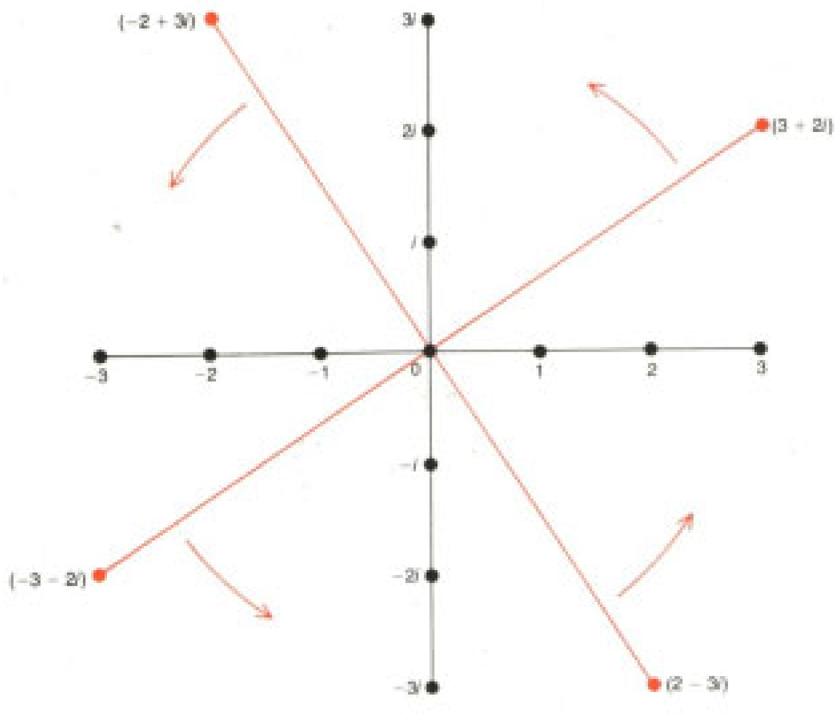
Con questa interpretazione dei numeri complessi ci si può completamente dimenticare del fatto, molto fastidioso, che **i** è la radice quadrata di -1 (il che, naturalmente, non rientra nella comune nozione di radice quadrata). Ora un numero complesso può essere visto semplicemente come una coppia ordinata di numeri reali: il primo numero misurato sull'asse reale e il secondo sull'asse immaginario. In altri termini, definendo correttamente le operazioni aritmetiche su queste coppie è possibile costruire un'algebra di coppie ordinate di numeri reali equivalente all'algebra dei numeri complessi. In questa nuova algebra non si incontra mai l'opaca espressione «la radice quadrata di un numero negativo» anche se la stessa idea è naturalmente presente in un diverso linguaggio e in diversa notazione. Se questa algebra di coppie ordinate fosse stata sviluppata prima dei numeri complessi, forse oggi nessuno ricorderebbe i numeri immaginari e si chiederebbe se essi esistono o meno.

Dopo la scoperta di questa interpretazione geometrica dei numeri complessi, i matematici si chiesero immediatamente se il concetto base poteva essere generalizzato alle tre dimensioni, cioè a punti nello spazio. La risposta, purtroppo, è no - a meno di una radicale trasformazione delle leggi dell'aritmetica. Fu il matematico irlandese William Rowan Hamilton a penetrare per primo nei «numeri ipercomplessi» inventando i quaternioni: numeri a quattro parti in cui un numero reale viene combinato a tre immaginari. La chiave per utilizzarli sta nel fatto che essi non obbediscono alla legge della commutatività della moltiplicazione: a quella regola, cioè, secondo cui per ogni due numeri a e b, ab è uguale a ba.

L'idea di eliminare questa legge venne ad Hamilton nel 1843 mentre passeggiava con la moglie lungo il Royal Canal di Dublino. Rimase così colpito dall'idea da fermarsi a incidere la formula base su una pietra del Brougham Bridge. Il graffito originale scomparve già ai tempi di Hamilton, ma sulla pietra c'è ora una targa che ricorda il grande evento e nel 1943, un secolo dopo la rivelazione di Hamilton, l'Irlanda stampò un francobollo a commemorazione del fatto. 1 quaternioni non formano un campo (la loro struttura è chiamata un anello con divisione o corpo non commutativo), ma l'algebra dei quaternioni è equivalente a un'algebra di quadruple ordinate e trova oggi spesso applicazione come parte della teoria dei vettori tridimensionali. La scoperta dell'algebra dei quaternioni segnò l'inizio della moderna algebra astratta, in cui possono trovare definizione tutti i tipi di «numeri», anche più strani dei numeri complessi.

In ragione della corrispondenza tra numeri complessi e punti del piano cartesiano, quando il piano viene usato in questo modo è chiamato il piano complesso. (Viene anche chiamato piano z per un non specificato numero complesso z uguale ad **a +bi**, e a volte diagramma di Argand perché per molti decenni rimase sconosciuta la precedente scoperta di Wessel.) Non entrerò in dettagli a proposito del modo in cui i numeri complessi possono essere sommati, sottratti, moltiplicati e divisi mediante diagrammi geometrici sul piano complesso. I lettori che non conoscono già le regole che governano queste operazioni possono trovarle in un qualsiasi testo di algebra elementare che comprenda anche i numeri complessi. Una breve spiegazione della moltiplicazione per **i** è però necessaria per introdurre un elegante teorema sulle radici dei numeri.

Per moltiplicare per **i** un numero sul piano complesso si prende il segmento di raggio-vettore che passa per il punto corrispondente (la linea che congiunge l'origine del piano al punto) e lo si ruota di 90 gradi in senso antiorario; il nuovo punto terminale del vettore corrisponde al prodotto del numero peri. E in questo senso che i può essere visto come un operatore. Per capire questa idea si consideri cosa avviene quando **i** è elevato a varie potenze: **i** elevato alla prima potenza è naturalmente uguale a **i** ed è facile vedere che i^2 è uguale



Moltiplicazione del numero complesso 3 + 2i per i, i^2, i^3 e i^4.

a -1, i^3 è uguale a - 1 e i^4 è uguale a I. Questo ciclo di quattro passi si ripete all'infinito: i^5 è uguale a **i**, i^6 è uguale a -1, i^7 uguale a **-i**, i^8 è uguale a 1 e cosi via. Tutte le potenze pari di **i** sono uguali a 1 o a - 1 e tutte le potenze dispari sono uguali a **i** oppure a **-i**.

Nella figura della pagina precedente si vede come queste osservazioni si applicano alla moltiplicazione di un numero (in questo caso π) per **i**. Individuato sul lato positivo dell'asse delle x il punto corrispondente a π, lo si muove di 90 gradi in senso antiorario lungo il cerchio di raggio π avente per centro l'origine del piano. Una freccia mostra come il punto terminale di questa operazione sia l'immaginario puro π **i** che giace sul lato superiore dell'asse delle y. Moltiplicare π per i^2, poi, equivale a moltiplicarlo due volte per **i**: il punto corrispondente a π è spostato di 180 gradi lungo il cerchio e va a finire nel punto -π sull'asse delle x, la retta dei numeri reali.

Analogamente, per moltiplicare π per i^3 si deve compiere un giro di 270 gradi, terminando nel punto -π i sul lato inferiore dell'asse delle y; moltiplicare π per i^4 è lo stesso che moltiplicare per 1, e così si torna a π. Si può continuare allo stesso modo per tutte le potenze di **i** superiori: ogni passaggio a una potenza immediatamente superiore richiedi un quarto di giro in senso antiorario lungo il cerchio.

La divisione per i richiede l'operazione inversa: bisogna muovere di 90 gradi li senso orario intorno all'origine del piano In altri termini, per ogni numero complesso si deve tracciare il raggio vettore dall'origine al punto che rappresenta il numero; poi, per moltiplicare il numero per **i** si ruota il vettore di 90 gradi in senso antiorario e per dividerlo per i si ruota il vettore di 90 gradi nell'altro senso.

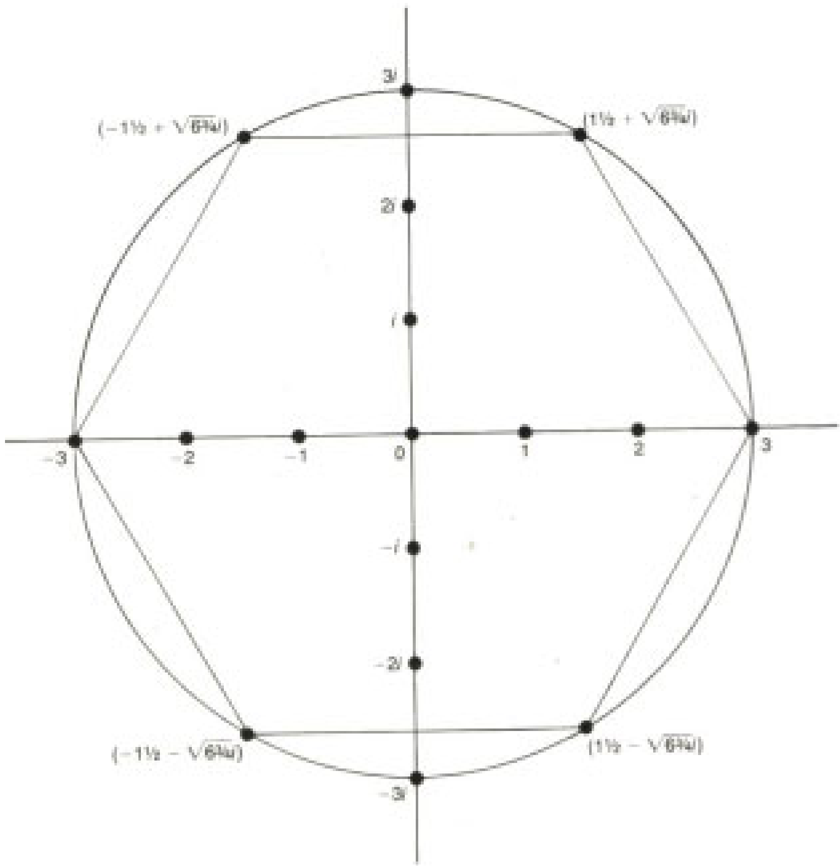
Con questa interpretazione della moltiplicazione risulta che, se si contano le radici complesse, ogni numero diverso da zero (reale o complesso) ha esattamente n radice n-esime. In altri termini, ogni numero ha due radici quadrate, tre radici cubiche, quattro radici quarte, cinque radici quinte e così via. Ne segue che ogni equazione cubica ha tre soluzioni, ogni equazione di quarto grado ha quattro soluzioni e così via; e quando facciamo il diagramma di singoli numeri sul piano complesso ci si rivela un'inattesa e interessante proprietà: gli n punti corrispondenti alle radici n-esime giacciono tutti. separati da distanze uguali, su un cerchio la cui origine è il centro del piano. In altri termini, i punti segnano gli angoli di un poligono regolare a n lati. Nella figura qui sotto, per esempio, si vede dove vengono a trovarsi i punti corrispondenti alle sei radici seste di 729.

Nel caso che il numero sia reale e abbia un numero pari di radici. due vertici del poligono giacciono sull’asse reale. Se il numero è reale e ha un numero dispari di radici, solo un vertice del poligono giace sull'asse reale.

Già prima di Eulero si sapeva che il prodotto di due immaginari puri è un numero reale, ma fu Eulero il primo a dimostrare che è reale anche i^i. Per la precisione esso è uguale a $e^{-\frac{\pi}{2}}$, un numero irrazionale con sviluppo decimale 0,2078795763... In realtà questo numero è solo uno degli infiniti valori di i^i tutti reali; tali valori sono dati dalla formula $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, dove k è un intero qualsiasi positivo o negativo: si ha il valore principale dato prima quando k è uguale a 0. Anche l'i-esima radice di í è un numero reale, il cui valore principale è $e^{\frac{\pi}{2}}$ ovvero 4,8104773...

Ci sono molte altre formule in cui **i** e collegato ai due ben noti irrazionali trascendenti, **e** (la base dei logaritmi naturali) e π .

La formula più famosa, sviluppata da Eulero ma basata su una scoperta anteriore, è $e^{i\pi}+1=0$, che Edward Kane e James Newman definiscono nel loro libro *“Mathematics and the Imagination”* , «elegante, concisa e densa di significato, Essi citano an-



Le sei radici seste di 729.

che un'osservazione fatta a proposito della formula da Benjamin Peirce, il matematico di Harvard padre di Charles Sanders Peirce:

«Signori. - egli disse, dopo aver scritto la formula su una lavagna - è sicuramente vera. [ma] è assolutamente paradossale; non riusciamo a capirla e non sappiamo cosa significhi, ma l'abbiamo dimostrata e sappiamo pertanto che deve essere vera.»

In realtà la formula non è del tutto senza senso. Riscritta sotto la forma $e^{i\pi} = -1$ può essere rappresentata sul piano z come limite della successione infinita:

$$1 + (\pi i) + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \dots$$

(i1 punto esclamativo è il segno di fattoriale: n! = 1 x 2 x 3 x 4 x ... x n.) I termini dì questa successione sono rappresentati come un insieme infinito di punti su una spirale antioraria di rette che circonda il punto -1 sull'asse reale.

George Gamow, cercando di dissipare mistero dei numeri complessi, ideò un giorno questo rompicapo.

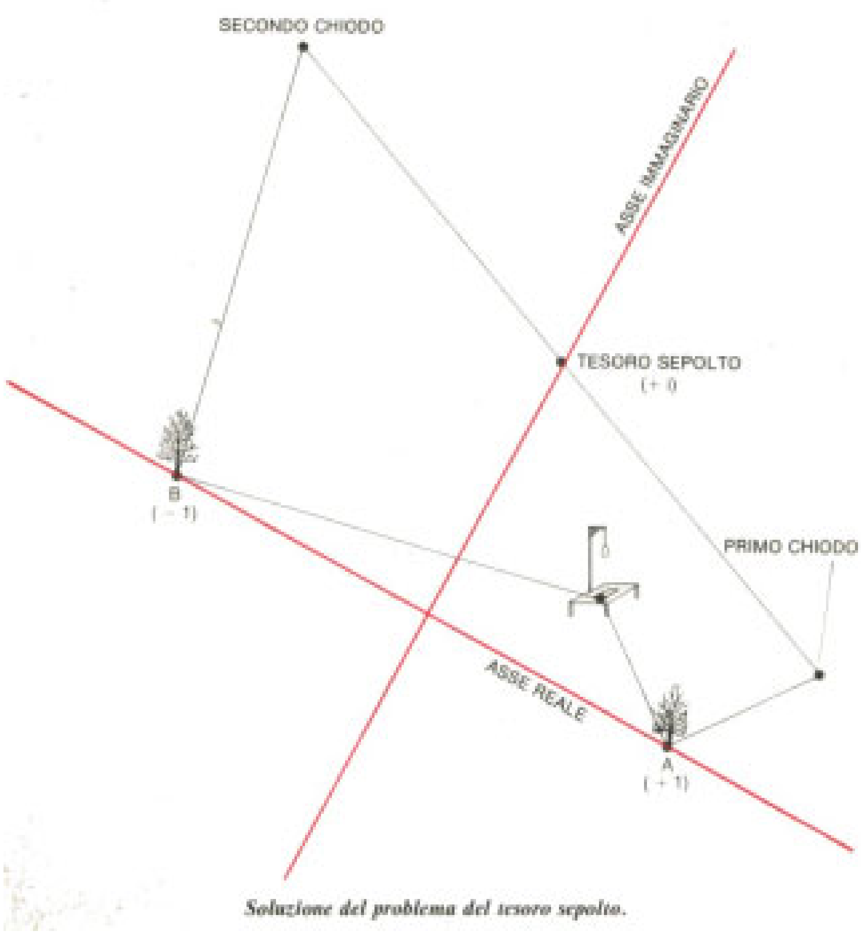
Una vecchia pergamena, che descriveva il posto in cui era sepolto un tesoro di pirati su un'isola deserta, dava le seguenti istruzioni. Sull'isola ci sono solo due alberi, A e B, e i resti di una forca. Partendo dalla forca contate il numero di passi necessari per raggiungere l'albero A camminando in linea retta. Arrivati all'albero, giratevi di 90 gradi a sinistra e procedete per lo stesso numero di passi. Nel punto in cui vi siete fermati piantate un bastone nel terreno. Tornate ora alla forca e camminate in linea retta fino all'albero B contando i passi. Raggiunto l'albero, voltatevi di 90 gradi verso destra e procedete per lo stesso numero di passi, piantando un altro bastone nel punto in cui vi fermate. Scavate nel punto che si trova esattamente a metà strada tra i due bastoni e troverete il tesoro.
Un giovane, trovata la pergamena con queste istruzioni, affittò una barca e navigò fino all'isola. Non ebbe difficoltà a trovare i due alberi, ma con suo grande disappunto la forca era scomparsa e il tempo ne aveva fatto sparire ogni traccia. Non conoscendo la posizione della forca. non riuscì a trovare alcun modo per individuare il tesoro e se ne tornò a mani vuote.

Gamow rileva che se il giovane avesse avuto familiarità con la tecnica di manipolazione dei numeri sul piano complesso avrebbe trovato facilmente il tesoro. 1 lettori che conoscono le regole di base per rappresentare i numeri complessi possono risolvere questo problema. di cui darò la soluzione il mese prossimo.

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI GAMOW

I1 problema di George Gamow presentato il mese scorso, quello di trovare il tesoro sepolto, può essere risolto nel modo seguente, anche non conoscendo la posizione della forca. Si tracci una retta che passi per gli alberi A e B, come è mostrato nell'illustrazione.
Chiameremo questa linea asse reale del piano complesso. Tracciamo quindi perpendicolarmente al punto medio fra A e B l'asse immaginario. Conveniamo che l'albero A si trovi nel punto che rappresenta il numero reale 1 e che l'albero B si trovi nel punto che rappresenta il numero reale -1. Scegliamo un punto qualsiasi come posto della forca.

Se si seguono le istruzioni della pergamena, ci si accorge che dovunque si erga la forca, il tesoro si troverà sull'asse immaginario in +**i** Questa osservazione può essere facilmente dimostrata ricorrendo alle regole per la manipolazione dei numeri nel piano complesso. Il problema si trova nel secondo capitolo del famoso libro *"Uno, due, tre-Infinito"* di Gamow. Chi sia interessato alla dimostrazione, la potrà trovare in quel libro.



Soluzione del problema del tesoro sepolto.