

# GIOCHI MATEMATICI

di Martin Gardner

Le Scienze 110 – Ottobre 1977

## Il problematico concetto di numero negativo

Quando un bambino impara a parlare i nomi dei primi pochi numeri interi positivi che impara sono essenziali per il suo vocabolario quasi quanto parole come «cane», «gatto» e «uccello». Anche i nostri antenati preistorici devono avere fatto un'esperienza analoga. I numeri per contare, detti talvolta numeri naturali, furono certamente i primi a richiedere un nome in vista della loro utilità. Oggi i matematici applicano la parola numero a centinaia di strane entità astratte ben lontane dal processo del contare.

Il primo passo verso l'ampliamento del concetto di numero fu il riconoscimento delle frazioni come numeri. Nonostante che nel mondo che ci circonda molte cose non vengano comunemente sperimentate come frazioni (le stelle, le mucche, i fiumi, ecc.) è facile comprendere il significato di mezza mela o di un terzo di dodici pecore. Ma il passo successivo, cioè l'accettazione di numeri negativi, fu così difficile che solo nel XVII secolo i matematici iniziarono a trovarsi a loro agio con essi.

Si devono distinguere i numeri negativi dalla sottrazione. Un bambino, o un mandriano non istruito, non troverà nessuna difficoltà nel sottrarre sei mucche da dieci mucche. Una «mucca negativa», comunque, è più difficile da immaginare che un fantasma di mucca. Un fantasma di mucca ha perlomeno un certo tipo di realtà, ma una mucca negativa è meno reale di nessuna mucca. Sottraendo una mucca da una mucca si ottiene il nulla, ma aggiungere una muc-

ca negativa a una positiva, facendole svanire entrambe, come una particella che incontra la sua antiparticella, sembra ridicolo come la vecchia barzelletta dell'individuo dalla personalità così negativa che quando arrivava a un party gli ospiti, come reazione, si guardavano intorno chiedendosi «Chi se ne è andato?».

Ecco ciò che i greci antichi supponevano che fossero i numeri negativi. Essi amavano la geometria e consideravano le entità matematiche come cose che si potessero schematizzare. I «numeri» erano i numeri usati per contare e le frazioni di interi positivi che potevano essere rappresentate con ciottoli o con punti su una lavagna. L'algebra primitiva dei greci non aveva né lo zero né le quantità negative. Essi erano inoltre riluttanti a considerare «uno» un numero perché, come afferma Aristotele, i numeri misurano le pluralità e uno è una unità di misura e non una pluralità.

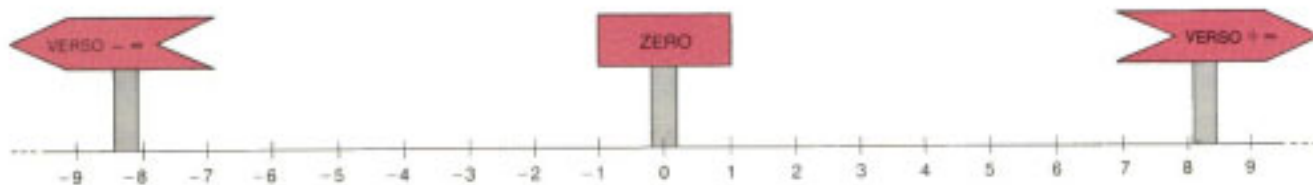
E' importante capire che questo atteggiamento fu in larga misura una questione di preferenza linguistica. I matematici greci sapevano che  $(10 - 4) \times (8 - 2)$  è uguale a  $(10 \times 8) - (4 \times 8) - (2 \times 10) + (2 \times 4)$ . Riconoscere una tale uguaglianza significa accettare implicitamente ciò che più tardi fu chiamata la legge dei segni: il prodotto di due numeri di segno uguale è positivo, il prodotto di due numeri di segno opposto è negativo. I greci preferivano non considerare  $-n$  un numero. Per loro non era altro che un simbolo per qualcosa che doveva essere sottratto. Si possono sot-

trarre due mele da dieci mele, ma sottraendo dieci mele da due mele si otteneva secondo loro un non senso. Essi sapevano che  $4x + 20 = 4$  dà a  $x$  il valore di  $-4$ , ma si rifiutavano di scrivere tale equazione perché la sua soluzione non era un «numero». Per la stessa ragione non consideravano  $-\sqrt{n}$  come radice quadrata di  $n$ .

Non si conosce esattamente come i primi babilonesi considerassero le quantità negative, ma sembra che si trovassero più a loro agio con esse di quanto non lo fossero i greci. I matematici cinesi, prima della nostra era, facevano i conti in modo rapido con bacchette di bambù, usando bacchette rosse per i numeri positivi (cheng) e bacchette nere (fu) per i negativi. I medesimi colori furono successivamente usati per i numerali scritti positivi e negativi. I Nove capitoli sull'arte matematica, un'opera famosa del periodo Han (dal 200 a.C. al 200 d.C. circa) spiega la procedura delle bacchette e si crede che contenga la prima apparizione scritta dei numeri negativi. Comunque, non riconosce le radici negative né la legge dei segni.

Un'algebra sistematica che usi lo zero e i numeri negativi non si sviluppò prima del VII secolo, quando i matematici indù iniziarono a usare i valori negativi per i problemi concernenti i crediti e i debiti. Essi non solo furono i primi a usare lo zero in modo moderno, ma scrissero anche equazioni in cui i numeri negativi erano simbolizzati per mezzo di un punto o di un piccolo cerchio posto sul numero. Essi formularono esplicitamente la legge dei segni e riconobbero che ogni numero positivo ha due radici quadrate, una positiva e una negativa.

In Europa la maggior parte dei matematici del Rinascimento, influenzati dalla tradizione greca, consideravano con sospetto le quantità negative. Si deve comunque ricordare che era più una questione di preferenza linguistica che di mancanza di comprensione. I matematici del Rinascimento conoscevano perfetta-



La retta numerica per gli interi.

mente il modo in cui manipolare le radici negative: le chiamavano «radici fittizie». Essi conoscevano perfettamente come risolvere le equazioni con i numeri negativi ma evitavano di applicare la parola «numero» alle quantità minori di zero.

Nel XVII secolo alcuni arditi matematici modificarono il loro linguaggio per includere i numeri negativi come numeri legittimi, ma questa pratica continuò a trovare resistenza, spesso da parte di matematici importanti. Descartes disse che le radici negative erano «false radici», e Pascal pensò che fosse un nonsenso chiamare numero qualcosa minore di zero. L'amico di Pascal, Antoine Arnaud, dimostrò l'assurdità dei numeri negativi nel modo seguente: la legge dei segni ci obbliga a dire che

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}.$$

Se si considera ciò un'uguaglianza tra due rapporti, dobbiamo asserire che un numero più piccolo sta a un numero più grande come uno più grande sta a uno più piccolo. Questo paradosso apparente, come sottolineò Morris Kline in *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (trad. it. *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano, 1976), fu molto discusso dai matematici del Rinascimento. Leibniz era d'accordo sul fatto che fosse difficile da risolvere, ma difese i numeri negativi come simboli utili in quanto era possibile compiere con essi calcoli corretti.

Alcuni matematici del XVII-XVIII secolo, John Wallis e Leonhard Euler, per nominarne due, accettarono i numeri negativi ma crederono che fossero maggiori di  $\infty$ . Perché? Perché

$$\frac{a}{0} \text{ è uguale a } \infty.$$

Perciò, se dividiamo  $a$  per un numero minore di zero, per esempio -100, non otteniamo un quoziente negativo che supera l'infinito?

Nel XVIII secolo l'uso algebrico dei numeri negativi, identificati con il segno meno, divenne comune in tutto il mondo. Nonostante ciò la maggior parte dei matematici rimase sconcertata. I loro libri includevano lunghe giustificazioni per la legge dei segni, e alcuni autori complicarono le loro dimostrazioni pur di evitare la moltiplicazione di due numeri negativi. Ecco un passo della

“*Dissertatio on the Use of Negative Sign in Algebra*” (1758) di Baron Francis Masères, un avvocato inglese che fu procuratore generale nel Quebec.

«Una quantità singola ... non può mai essere considerata sia positiva che negativa; infatti se una quantità singola qualsiasi, come  $b$ , viene contrassegnata o col segno + o col segno -, senza assegnare qualche altra quantità, come  $a$ , a cui deve essere sommata, o da cui deve essere sottratta, il contrassegno non avrà nessun significato: cioè, se si dice che il quadrato di -5 ... è uguale a +25, tale asserzione o non deve significare altro che 5 per 5 è uguale a 25 senza nessuna considerazione dei segni, oppure si tratta di un non senso.»

Questo passo è citato da Augustus De Morgan in “*A Budget of Paradoxes*”. Masères, ci dice De Morgan, era un avvocato onesto incapace di difendere il suo cliente se lo credeva colpevole. Come risultato, scrive De Morgan, gli affari di Masères diminuirono sempre di più.

Poche pagine prima De Morgan attacca “*The Principles of Algebra*”, di William Frennd, un pastore che tra l'altro era suo suocero. (L'espulsione di Frennd da Cambridge a causa delle sue credenze unitarie fu una causa celebre, difesa in modo appassionato da Samuel Taylor Coleridge e da Joseph Priestly.) I due volumi di Frennd furono probabilmente il testo di algebra più ambizioso mai scritto in cui lo zero e tutti i numeri negativi erano mal visti come Frennd lo era a Cambridge.

Come si può fare dell'algebra senza i numeri negativi? In primo luogo si dovrebbe evitare qualsiasi equazione che conduca a un numero negativo di oggetti reali o che assegni grandezze negative a essi. Anche quando un'equazione conduce a una soluzione positiva corretta deve essere scritta in modo tale da evitare un valore negativo per un'incognita. Per esempio: quando una madre di 29 anni ha un'età doppia di sua figlia di 16 anni? Se formuliamo il problema come segue:  $29 + x = 2(16 + x)$ ; allora scopriremo, forse con sorpresa, che  $x = -3$ . Questo risultato conduce alla risposta corretta. La madre aveva un'età doppia di quella di sua figlia quando aveva 26 anni e la figlia ne aveva 13. Un algebrista del

XVIII secolo, che respingeva i numeri negativi, avrebbe evitato il -3 riscrivendo l'equazione nel modo seguente:  $29 - x = 2(16 - x)$ . Questo aggiustamento dà alla  $x$  il valore accettabile di tre, il quale naturalmente conduce alla medesima risposta di prima.

Nei secoli scorsi, come accade oggi a chi inizia lo studio dell'algebra elementare, l'ostacolo maggiore all'accettazione dei numeri negativi consisteva nel «vedere» in che modo il prodotto di due numeri negativi potesse essere positivo. Moltiplicare due numeri positivi non presenta alcuna difficoltà. Si mettano tre paia di arance in una scatola vuota e la scatola conterrà sei arance. La moltiplicazione di un numero positivo per un numero negativo inizia a essere misteriosa ma non è difficile da comprendere se si ammette la realtà astratta di un'arancia negativa. Si mettano tre paia di arance negative nella scatola e si avranno sei arance negative. Ma cosa significa moltiplicare due arance negative per -3? Per iniziare si hanno due fantasmi di arance, tutte meno di niente, e quindi si compie su di esse una qualche operazione negativa. Da dove vengono fuori le sei arance reali? Sembrano apparire nella scatola come il risultato di una magia.

Cercare di spiegare questo fatto percorrendo la retta dei numeri, come si vede nell'illustrazione, non porta a risultati soddisfacenti con principianti. E' facile identificare i numeri interi positivi con dei contrassegni posti alla destra dello zero e i numeri interi negativi con dei contrassegni alla sinistra dello zero. L'addizione è un movimento verso destra e la sottrazione è un movimento verso sinistra. Per moltiplicare 2 per 3 ci si sposta di due unità a destra e si fa questo movimento per tre volte fino ad arrivare a 6. Per moltiplicare -2 per 3 ci si sposta di due unità a sinistra e si fa questo movimento per tre volte fino ad arrivare a meno 6. Ma che operazione si compie nel caso di -2 per -3? Quale forza fa in modo che si passi in maniera brusca dalla sinistra alla destra dello zero?

E' facile perdonare ai matematici dei secoli più antichi di avere considerato questo concetto assurdo. Infatti, l'operazione non fu pienamente compresa finché strutture astratte come gruppi, anelli e campi non fu-

rono definite con cura. Non è questo il luogo per spiegare tali strutture, e quindi mi accontento di sottolineare che quando i matematici trovarono che fosse cosa desiderabile ampliare il concetto di numero per includere lo zero e i numeri negativi, vollero che i nuovi numeri si comportassero, per quanto possibile, in modo molto simile a quelli vecchi.

Uno degli assiomi fondamentali della vecchia aritmetica è la legge distributiva, per la quale

$$a(b+c) = ab+ac$$

ad esempio

$$2(3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4.$$

Se si sostituiscono il 2 e il 3 con numeri negativi l'uguaglianza sarà valida solo se si adotta la regola secondo la quale il prodotto di due numeri negativi è positivo. Se il prodotto fosse negativo, l'equazione si ridurrebbe a  $-2 = -14$ , cioè a una contraddizione. Secondo la terminologia moderna, i numeri interi formano un «anello» chiuso rispetto all'addizione, alla sottrazione e alla moltiplicazione. Questa condizione significa che comunque si sommino, si sottraggano o si moltiplichino numeri interi, qualunque sia il loro segno, il risultato è sempre un numero intero. Tutte le vecchie leggi dell'aritmetica valgono ancora e non s'incontra mai una contraddizione. (Non sempre è possibile effettuare la divisione perché si potrebbe ottenere una frazione, e le frazioni non sono elementi dell'anello.)

Non è quindi corretto dire che i ma-

tematici possono «dimostrare» che il prodotto di due numeri negativi è positivo. Piuttosto un accordo sulle regole che fa in modo che i numeri negativi obbediscano tutti alle vecchie regole per i numeri usati per contare. Se s'includono anche le frazioni d'interi, l'anello si allarga in un «campo» che è chiuso rispetto alle quattro operazioni aritmetiche.

Sebbene non ci siano dimostrazioni del fatto che  $(-2) \times (-3) = 6$ , è facile pensare ai modi in cui la legge dei segni si applica a situazioni reali. Infatti si applica a tutte le situazioni che implicano numeri su di una scala che ha due direzioni opposte: est e ovest, alto e basso (ad esempio un termometro), avanti e indietro nel tempo (senso orario e senso antiorario in un orologio), profitti e perdite, e a centinaia di altre situazioni.

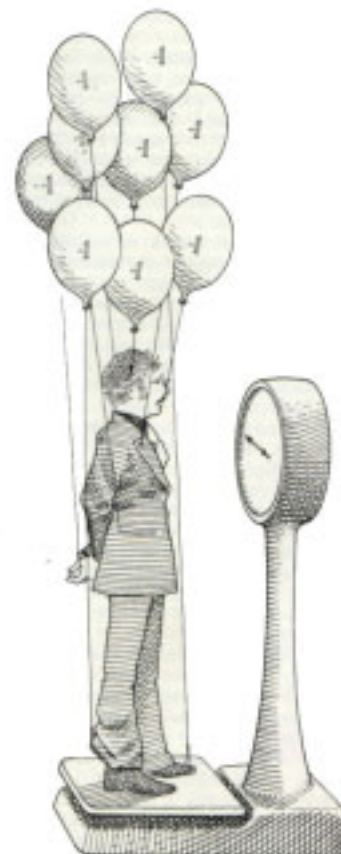
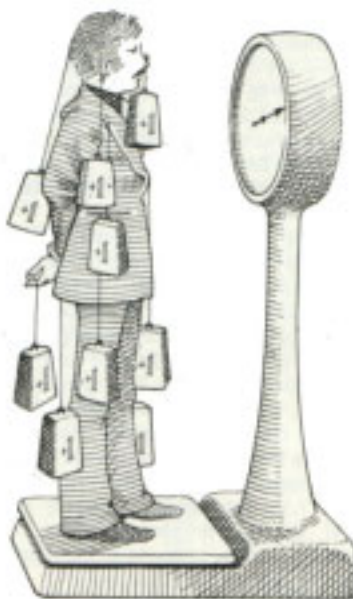
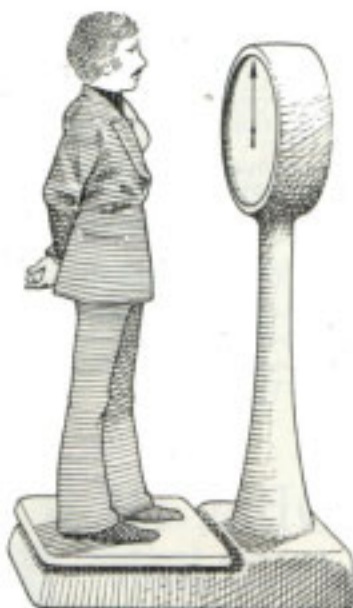
Applicando la legge dei segni a questi esempi si devono sempre distinguere le quantità dalle operazioni effettuate su di esse. La distinzione è particolarmente necessaria quando si considera la moltiplicazione di una quantità assegnata per un numero negativo. È facile comprendere che cosa significa prendere una quantità positiva o una negativa  $n$  volte, ma che cosa significa prenderla  $-n$  volte? Il modo più chiaro di considerare questa operazione elusiva consiste nel dividerla in due parti:

1. Si sommi la quantità data  $n$  volte;
2. Si converta il risultato nel suo inverso rispetto allo zero. In altre pa-

role, si cambi il segno.

Sulla retta numerica il secondo passo equivale a trovare l'immagine speculare di un punto rispetto allo zero. Si immagini un insetto in  $-2$ . Per moltiplicare la sua posizione per 3 non ci sono difficoltà. Si somma semplicemente 2 per tre volte per portare l'insetto in  $-6$ . Ma se l'insetto è in 2 e si desidera moltiplicare per  $-3$  l'operazione consiste nel sommare 2 tre volte, mettendo l'insetto in 6, e quindi invertire il segno. Questa procedura trasporta l'insetto nell'immagine speculare del punto in  $-6$ . Se l'insetto è in  $-2$ , la moltiplicazione per  $-3$  viene effettuata nel modo seguente. Si somma  $-2$  tre volte, portando l'insetto in  $-6$ , quindi l'inversione lo porta in 6.

Questo può sembrare un incantesimo sulla retta numerica, ma quando si applica la procedura ad altre situazioni sembra normale. Per esempio, si supponga che un uomo perda al gioco \$ 10 al giorno. Il futuro si definisce come positivo e il passato come negativo. Fra tre giorni a partire da oggi avrà perso \$ 30 ( $3 \times (-10) = -30$ ). Tre giorni fa egli aveva \$ 30 in più di oggi ( $-3 \times (-10) = 30$ ). Situazioni equivalenti sorgono su qualsiasi scala diretta. Se in una ci-



Un modello per la legge dei segni.

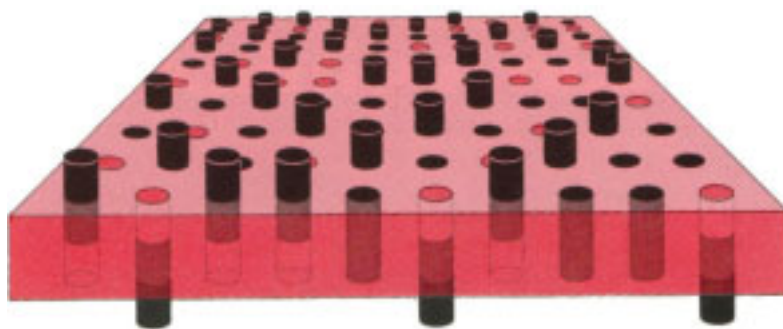


sterna l'acqua si abbassa con una velocità di 3 centimetri al minuto, due minuti fa il livello era  $(-3) \times (-2) = 6$  centimetri più alto. Se l'insetto si sposta a ovest sulla retta numerica di 3 centimetri al secondo, allora due secondi fa era  $(-3) \times (-2) = 6$  centimetri più a est.

La proprietà più familiare degli oggetti che si presta ad assumere grandezze negative è il peso. Si aggiungano dei pesi da un grammo alle proprie tasche e si sarà più pesanti. Si attacchino dei palloncini gonfiati di elio al proprio corpo, ciascuno dei quali solleva il peso di un grammo, e si sarà più leggeri. Si tolgano tre paia di palloncini e il proprio peso aumenterà di  $(-2) \times (-3) = 6$  grammi.

«Si immagini una città in cui la gente buona entra ed esce - scrisse Roy Doubish (*"The Mathematics Teacher"*, dicembre, 1971) - e anche la gente cattiva entra ed esce. Ovviamente la gente buona è contrassegnata da un segno + e la gente cattiva da un segno -1~ evidente che una persona buona che entra nella città è un + per la città; una persona buona che lascia la città è un -; una persona cattiva che entra nella città è un -; una persona cattiva che lascia la città è un +. » Se tre coppie di persone cattive escono, la città guadagna  $(-2) \times (-3) = +6$  punti. Si può esemplificare la situazione con gettoni da poker di due colori e con un punto per rappresentare la città. Sono stati proposti altri modelli per insegnare ai bambini le operazioni che si possono fare sull'anello dei numeri interi. Ecco un mio modello così semplice che probabilmente altri lo avranno già escogitato. Consiste di una scacchiera quadrata dello spessore di un centimetro in cui sono stati praticati cento buchi in una disposizione quadrata. Ciascun buco contiene un piolo lungo un centimetro. Il piolo può assumere una delle tre posizioni seguenti: rasente alla scacchiera (0), sporgente in alto di mezzo centimetro (+1), oppure sporgente verso il basso di mezzo centimetro (-1). Se tutti i pioli sono rasenti, la scacchiera si trova nello stato zero. Se k pioli sporgono in alto, è nello stato k; se k pioli sporgono in basso è nello stato -k.

Per sommare n allo stato della scacchiera si spingono in alto n pioli, spingendo sempre in alto per primi i pioli che eventualmente sporgono in



La scacchiera a pioli che conserva traccia dei segni.

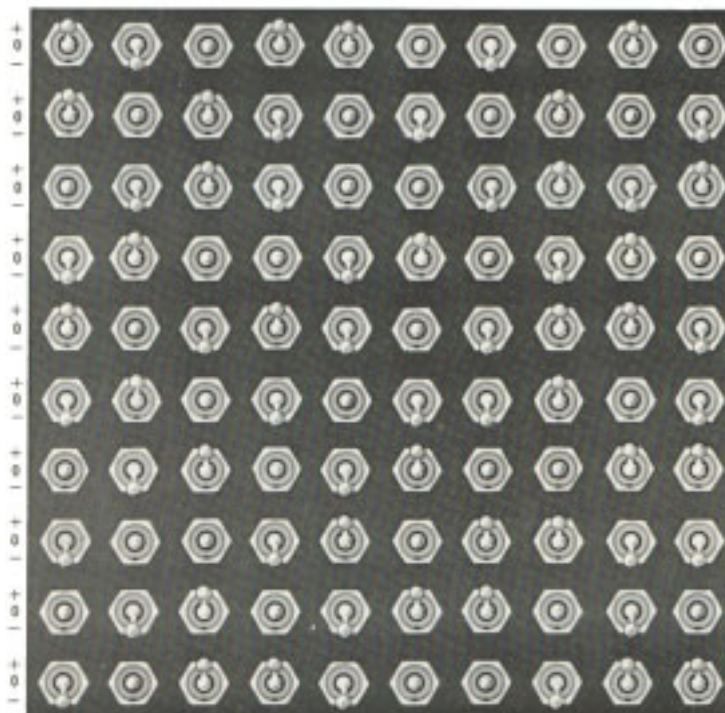
basso. Per sottrarre n dallo stato della scacchiera si spingono in basso n pioli, spingendo sempre per primi quelli che eventualmente sporgono in alto.

Per moltiplicare lo stato della scacchiera per n, si somma lo stato per n volte. Se lo stato è zero, non si deve fare nulla. Se k pioli sporgono verso l'alto, si spingono il alto altri n-1 insieme di k pioli. Se k pioli sporgono verso il basso, si spingono in basso altri n-1 insieme di k pioli. Per moltiplicare lo stato della scacchiera per -n, prima si moltiplichi per n e poi si capovolga la scacchiera.

Un modello che forse è più facile da realizzare consiste in una scacchiera con piccoli interruttori che possono essere in tre posizioni: in alto (+), nel mezzo (0) o in basso (-1). In questo caso la moltiplicazione per un numero negativo termina con la rotazione della scacchiera di 180 gradi. Se Aristotele fosse vivo oggi e aves-

se 20 anni per studiare l'algebra moderna potrebbe ancora preferire usare la parola «numero» per indicare solo i numeri naturali maggiori di uno. (E' possibile sostenere che tutti i numeri «artificiali» non sono altro che costruzioni ottenute a partire dai numeri naturali.) Si tratta di un sofisma che non conduce a nulla. Il fatto importante è che anelli e campi, dove ogni elemento ha il suo inverso o la sua copia negativa, si possono applicare a molti oggetti e fenomeni naturali:

Ci si può cacciare in guai seri cercando di applicare i numeri negativi e la legge dei segni ed alcune cose del mondo reale, ma alcune volte l'applicazione è inaspettatamente felice. A parte la radiazione, la scacchiera coi pioli non è un cattivo modello della famosa teoria di P. A. M. Dirac sulle particelle e le antiparticelle, teoria che ha permesso di predire l'esistenza del positone!



Il modello a interruttori per la legge dei segni.