TEORIA DELLE MOLTEPLICITA'

Sia data una espressione algebrica del tipo

$$\frac{P_1(x)^{\alpha_1}\cdot P_2(x)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot P_n(x)^{\alpha_n}}{Q_1(x)^{\beta_1}\cdot Q_2(x)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot Q_n(x)^{\beta_n}} = P_1(x)^{\alpha_1}\cdot P_2(x)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot P_n(x)^{\alpha_n}\, Q_1(x)^{-\beta_1}\cdot Q_2(x)^{-\beta_2}\cdot\ldots\cdot Q_n(x)^{-\beta_n}$$

dove tutti i $P_i(x)$ e $Q_i(x)$ sono polinomi al massimo di primo grado. D'ora in poi considereremo solo espressioni algebriche di questo tipo.
Chiameremo ***valori limite*** dell'espressione tutti i valori di x che annullano almeno uno dei polinomi $P_i(x)$ e $Q_i(x)$.
Chiameremo invece ***molteplicità*** del valore limite x_i il grado complessivo con cui il termine $(x- x_i)$ è contenuto nell'espressione assegnata.
Si dice ***molteplicità all'infinito*** la differenza tra il grado del numeratore e il grado del denominatore.

Ad esempio: $\dfrac{(x-2)^3(x+1)^2x}{(x+3)(x-3)} = (x-2)^3(x+1)^2x(x-3)^{-1}(x+3)^{+1}$

Valori limite	2	-1	0	3	-3	$+\infty$	$-\infty$
Molteplicità	3	2	1	-1	-1	4	4

La molteplicità di un valore limite coincide praticamente con l'esponente del fattore da cui il valore limite proviene. In realtà deve essere calcolato con attenzione perché quel valore limite potrebbe apparire in più termini. In questo caso si deve ricordare che, essendo i valori limiti esponenti, valgono le consuete proprietà delle potenze.

D'ora in poi supporremo che nell'espressione $\dfrac{P_1(x)^{\alpha_1}\cdot P_2(x)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot P_n(x)^{\alpha_n}}{Q_1(x)^{\beta_1}\cdot Q_2(x)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot Q_n(x)^{\beta_n}}$ non vi siano due fattori che presentano lo stesso valore limite.

Diremo che un valore limite è ***pari*** se il fattore da cui proviene non può cambiare di segno, che è ***dispari*** se il fattore da cui proviene può cambiare di segno

Ad esempio: $\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)}\cdot(x-1)^2\cdot x}{|x+3|\cdot(x-3)}$

Valori limite	2	1	0	3	-3	$+\infty$	$-\infty$
Molteplicità	1/3	2	1	-1	-1	4/3	4/3
Parità	D	P	D	D	P		

Queste considerazioni possono essere estese, con un po' di attenzione, anche al caso in cui i polinomi $P_i(x)$ e $Q_i(x)$ siano di secondo grado. Questo perché siamo in grado di trovare le soluzioni di un'equazione di secondo grado e, quindi, di scomporre un'espressione di secondo grado nel prodotto di due fattori di primo grado (se ovviamente ammette soluzioni).

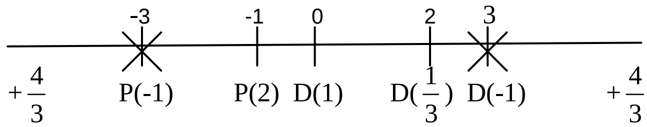
Ad esempio $\dfrac{(x^2-3x+2)(x^2+1)}{(3-x)x^2}$

Valori limite	3	0	1	2	$+\infty$	$-\infty$
Molteplicità	-1	-2	1	1	1	1
Parità	D	P	D	D		

Se i polinomi $P_i(x)$ e $Q_i(x)$ sono di grado superiore al secondo il problema di ricercare le soluzioni dei fattori risulta difficile perché, in generale, esistono formule semplici solo per le equazioni di primo e secondo grado. Esiste comunque, a questo proposito, un teorema che afferma che qualunque polinomio può essere scomposto in un prodotto di fattori di, al massimo, secondo grado.

Tutte queste informazioni possono essere riassunte su un asse che chiameremo ***asse delle molteplicità.***

Ad esempio: $\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)}\cdot(x+1)^2\cdot x}{|x+3|\cdot(x-3)}$ presenta un asse delle molteplicità del seguente tipo

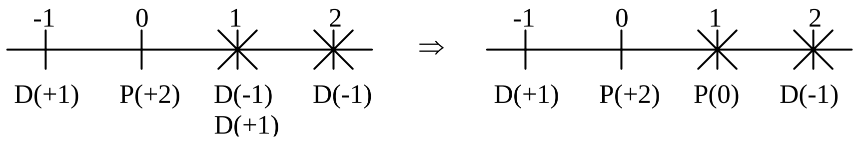


Si osservi che i valori limite –3 e 3 sono stati crociati perché essi provengono da fattori al denominatore e quindi costituiscono valori che fanno annullare il denominatore stesso e quindi esclusi (Condizioni di Realtà). D'ora in poi considereremo le molteplicità all'infinito solo quando necessario

ESERCIZI GUIDATI

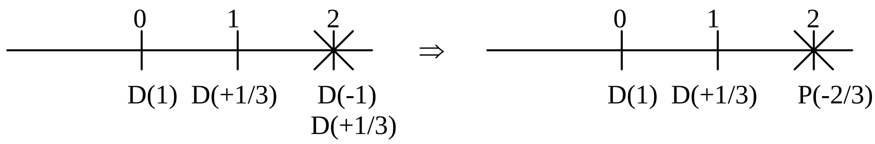
Scrivere l'asse delle molteplicità per le seguenti espressioni algebriche:

(1) $\dfrac{x^2(1-x^2)}{x^2-3x+2}$



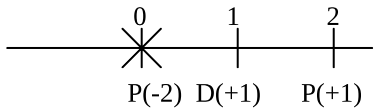
E' necessario far fare attenzione alla presenza di uno stesso valore limite sia al numeratore che al denominatore (x=1) e quindi far osservare che la molteplicità di tale valore è 0. Di conseguenza la parità del valore limite è PARI.

(2) $\dfrac{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}{x-2}$



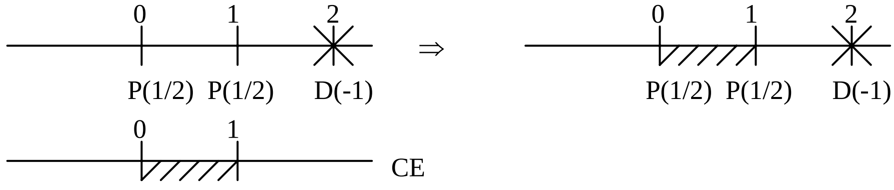
E' necessario far ancora attenzione alla presenza di uno stesso valore limite al numeratore e al denominatore (x=2). Inoltre è necessario insistere sul calcolo delle molteplicità dei valori limite sotto radice.

(3) $\dfrac{|2-x|(x-1)}{x^2}$



L'esercizio serve soprattutto ad osservare come vengono trattati i valori limite che provengono da valori assoluti. Non bisogna confondere parità e disparità di un valore limite con la parità o disparità della molteplicità

(4) $\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{2-x}$



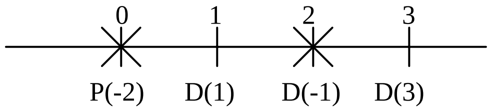
Questo esercizio è molto interessante perché mostra da una parte come si possono inserire anche le radici di indice pari nella trattazione, considerando in modo corretto sia la molteplicità che la parità dei valori limite, sia come è però necessario calcolarsi sempre le condizioni di esistenza dell'espressione algebrica. Il diagramma delle molteplicità deve infatti contenere tutte le CE dell'espressione.

APPLICAZIONI DELL'ASSE DELLE MOLTEPLICITA': le disequazioni

La conoscenza dell'asse delle molteplicità consente di risolvere diversi problemi in modo semplice. Il rigore matematico in questa fase lascerà necessariamente il posto ad una minima dose di intuizione.
Si supponga di voler risolvere la seguente disequazione

$$\frac{(x-1)(3-x)}{x^2(2-x)} > 0$$

il cui asse delle molteplicità è il seguente



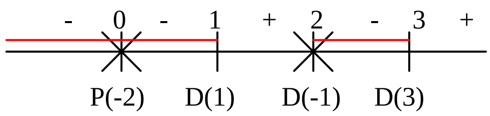
Soffermiamoci un attimo sul significato della disequazione proposta. Essa richiede che si determini l'insieme dei valori di x che rendono positiva l'intera espressione a sinistra. Ricordiamo ancora che studiare il segno dell'espressione proposta è equivalente, ad eccezione dei punti di realtà, a studiare il segno dell'espressione $(x-1)(3-x)x^2(2-x)$, con tutti i fattori al numeratore. Ora, la precedente espressione, per cambiare segno, deve prima annullarsi e quindi possiamo concludere che:

A) Un'espressione algebrica può cambiare segno solo nei punti limite

Ma se un punto limite è pari il fattore da cui il punto limite discende assume sempre segno costante, di conseguenza possiamo meglio specificare la proprietà precedente

B) Un'espressione algebrica può cambiare segno solo nei punti limite dispari

Di conseguenza per determinare il segno dell'intera espressione sarà sufficiente determinarlo solo in una qualsiasi delle zone in cui l'asse delle molteplicità è diviso dai punti limite. Risulta conveniente, per il calcolo, pensare di determinare il segno dell'espressione nell'intervallo più a destra, vale a dire per un valore molto grande dell'incognita (questo perché non ci interessa il valore assunto dall'espressione, ma solo il suo segno). Nel caso in esempio, se x fosse molto grande (sto pensando a x=100), il fattore $(x-1)$ risulterebbe positivo, $(3-x)$ negativo, x^2 positivo, (2-x) negativo: due fattori positivi e due negativi, di conseguenza l'espressione risulta positiva. Si può completare l'asse delle molteplicità indicando il segno + sull'intervallo più a destra e scrivendo i segni sugli altri intervalli spostandoci verso sinistra, mantenendo il segno se si attraversa un punto limite pari, cambiandolo se si attraversa un punto limite dispari:



Questo asse finale, che chiameremo asse completo delle molteplicità, ci consente di risolvere la disequazione proposta nominando semplicemente gli intervalli contrassegnati dal segno (in questo caso) +. Supponiamo ancora di avere

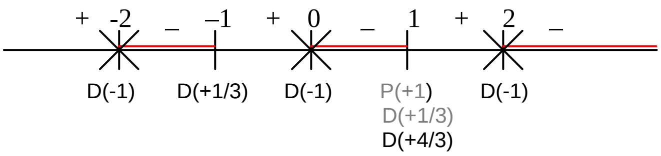
$$\frac{|x-1|\sqrt[3]{x^2-1}}{(x^2+1)(4-x^2)x} \ ? \ 0$$

Il punto interrogativo tra i due membri è stato posto volontariamente, perché sia chiaro che il verso della disequazione non influisce sul metodo che verrà utilizzato, ma solo sulla scelta finale delle soluzioni. Indichiamo le considerazioni che ci consentono di costruire l'asse delle molteplicità:

Il fattore	x^2+1	non si annulla mai, quindi non produce valori limite
Il fattore	$(4-x^2)$	produce due valori limite, +2 e –2, entrambi dispari, con molteplicità –1
Il fattore	x	produce un valore limite, 0, dispari, con molteplicità –1
Il fattore	$\|x-1\|$	produce un valore limite, +1, pari, con molteplicità +1
Il fattore	$\sqrt[3]{x^2-1}$	produce due valori limite, +1 e –1, dispari, con molteplicità +1/3
		$(\sqrt[3]{x^2-1}=(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}})$

Infine, per x grande, tutti i fattori sono positivi ad eccezione di $(4-x^2)$ e quindi l'intera espressione risulta negativa.

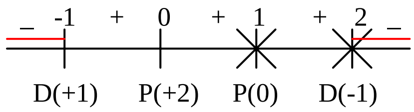
L’asse completo delle molteplicità è così costituito



A secondo del verso della disequazione di partenza verranno scelti gli intervalli opportuni. E’ da risaltare il fatto che il metodo utilizzato, come vedremo più avanti, ci fornisce un insieme molto vasto di informazioni e noi ne usiamo solo una parte per risolvere una disequazione.

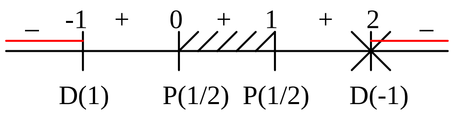
Esercizi guidati

1) $\dfrac{x^2(1-x^2)}{x^2-3x+2} \le 0$



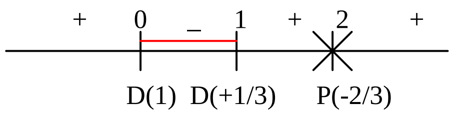
In questo esercizio le soluzioni sono date da $S = \{x \le 1 \wedge x > 2\}$. Si deve far notare che l’espressione algebrica si annulla in tutti (e solo) i punti limite non esclusi dalle condizioni di esistenza. Nel caso di disequazioni con relazione d’ordine $\le$ o $\ge$ essi vanno inclusi nella soluzione.

2) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x^2-x}}{2-x} \ge 0$



Questo esercizio risulta piuttosto istruttivo perché mostra una espressione algebrica con un fattore irrazionale pari e quindi bisognerà considerare bene le condizioni di esistenza. Ebbene, con questo metodo, una volta riconosciuti pari i valori limite x=0 e x=1 (provengono da un radicale pari, e quindi sempre positivo), si procede normalmente, “incollando” le CE solo alla fine, dopo aver determinato i segni nei singoli intervalli..

3) $\dfrac{x\sqrt[3]{x^2-3x+2}}{x-2} < 0$



N.B.

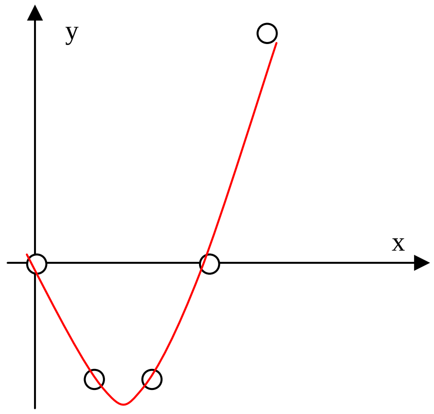
Il metodo delle molteplicità così come spiegato non presenta significative differenze dalla consueta “regola dei segni” utilizzata per risolvere le stesse disequazioni, anzi, quest’ultima è spesso necessaria, ad esempio per risolvere la disequazione $\dfrac{2x-\sqrt{1+x}}{x(x+1)}$ >0. E’ importante far riflettere gli studenti sul perché quest’ultima espressione non possa essere trattata (semplicemente) con le molteplicità insistendo sul fatto che il numeratore non è scritto nella forma $P(x)^{\alpha}$ con $P(x)$ polinomio di primo o secondo grado. Di $P(x)$ non è facile, in generale, calcolarsi il valore limite e la sua molteplicità.
Il vantaggio del metodo delle molteplicità consiste, anche se limitatamente ai casi trattabili, nella sua estrema semplicità e linearità (si può proporre la disequazione $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}{x(1-x)(x-2)(3-x)(x-4)(5-x)} > 0$, improponibile con la regola dei segni), nell’utilizzo successivo che porterà alla rappresentazione grafica delle funzioni, alla possibilità di anticipare scritture e concetti degli anni successivi, al consolidamento nello studente dello stretto legame che esiste tra algebra e geometria, all’immediata acquisizione di metodi di calcolo approssimato.

APPLICAZIONI DELL'ASSE DELLE MOLTEPLICITA': la rappresentazione grafica delle funzioni

Supponiamo di avere una funzione y=f(x). Il grafico della funzione è l'insieme dei punti (x,y) del piano cartesiano che soddisfano l'equazione y=f(x). Un grafico può essere disegnato in vari modi, basta disporre di un conveniente numero di punti della funzione stessa. Il modo più semplice per ricavarseli è quello di prendere un insieme di valori x_i, sostituirli nell'espressione della funzione ricavando il corrispondente valore y_i.

Es. $y = x^2 - 3x$

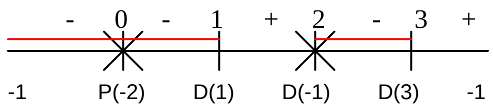
x	y
0	0
1	–2
2	–2
3	0
4	4



Questo metodo non fornisce un grafico esatto in ciascun punto, ma per molti problemi è più che sufficiente.

L'asse delle molteplicità consente di rappresentare graficamente una funzione utilizzando un approccio diverso. Sia assegnata la funzione $y = \dfrac{(x-1)(3-x)}{x^2(2-x)}$.

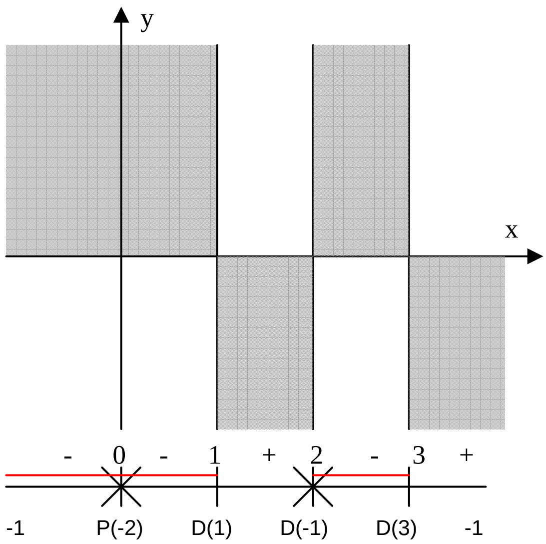
L'asse delle molteplicità, su cui sono indicate anche le molteplicità all'infinito, è rappresentato a fianco:



Seguiamo i passi necessari per studiare la funzione. L'unica cosa di cui avremo bisogno sarà solo l'asse delle molteplicità.

Primo passo

Metodo delle regioni: l'asse delle molteplicità ci indica dove l'espressione è positiva e dove è negativa. Sappiamo cioè che, per i valori di x compresi in un certo intervallo, l'espressione algebrica assume valori positivi o negativi. Di conseguenza, poiché noi vogliamo rappresentare sul grafico tali valori, sappiamo già se si trovano sopra o sotto l'asse x e quindi possiamo eliminare dal piano quelle regioni in cui sicuramente non si trovano punti della funzione.

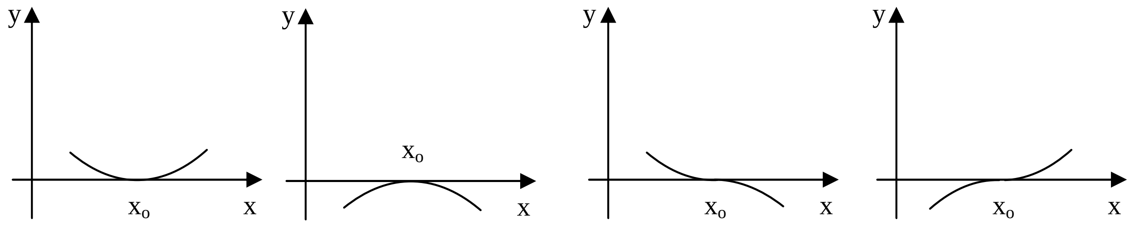


Secondo passo

I valori delle molteplicità indicate sull'asse ci permettono di rappresentare la curva *in prossimità* dei valori limite. Esistono a tale proposito tutta una serie di proprietà delle funzioni che possono essere, a giudizio del docente, o elencate, o verificate con un programma per computer, o giustificate elementarmente. La dimostrazione rigorosa è un problema di analisi (classe quinta).

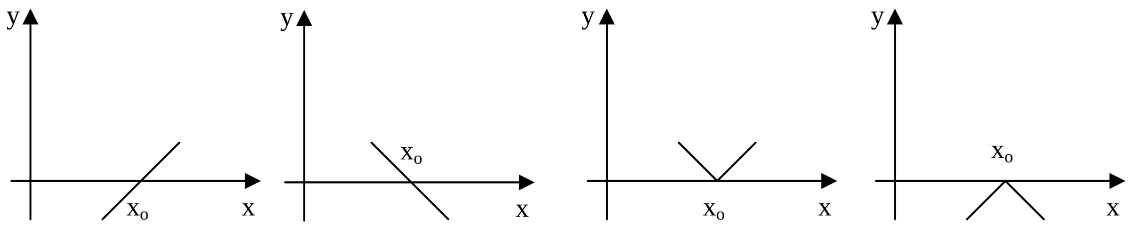
Di seguito viene fornita la tabella che associa al valore della molteplicità i possibili andamenti grafici. L’insegnante non deve far studiare mnemonicamente i vari casi, ma far capire come essi vengono realizzati.

Andamento della funzione in un punto limite x_0
Molteplicità **m>1**: a seconda dei segni indicati sull’asse delle molteplicità si sceglie uno degli andamenti seguenti



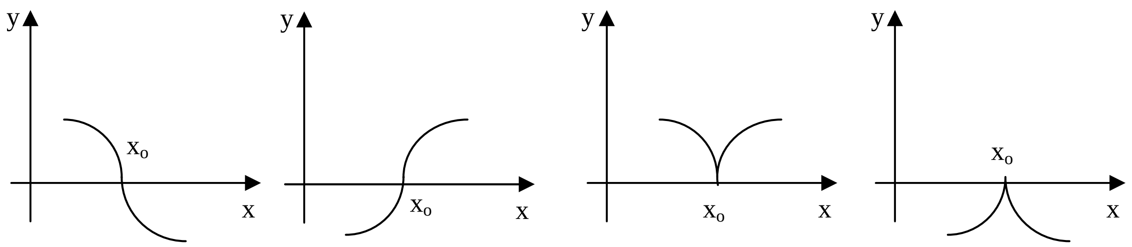
tangenza orizzontale — tangenza orizzontale — flesso orizzontale discendente — flesso orizzontale ascendente

Molteplicità **m=1**: a seconda dei segni indicati sull’asse delle molteplicità si sceglie uno degli andamenti seguenti



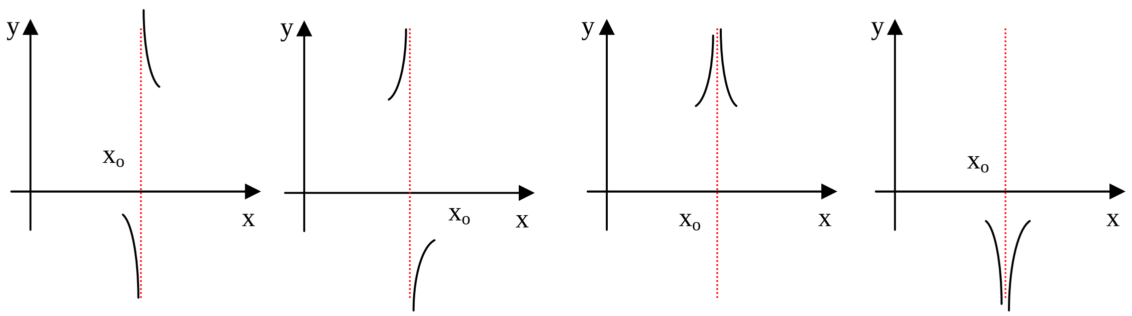
passaggio standard — passaggio standard — punto angoloso — punto angoloso

Molteplicità **0<m<1**: a seconda dei segni indicati sull’asse delle molteplicità si sceglie uno degli andamenti seguenti



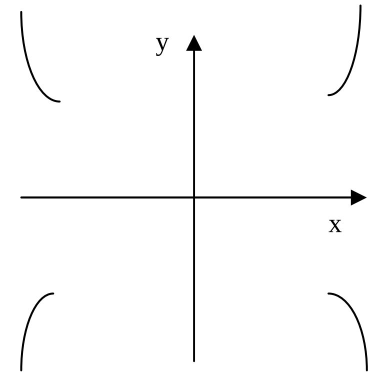
flesso verticale discendente — flesso verticale ascendente — cuspide — cuspide

Molteplicità **m=0**: si ignora il punto limite. La molteplicità m=0 indica che i fattori che hanno prodotto il punto limite sono presenti, con lo stesso grado, sia al numeratore che al denominatore. L’espressione algebrica è semplificabile ed è quindi possibile calcolare esattamente il valore nel punto limite
Molteplicità **m<0**: a seconda dei segni indicati sull’asse delle molteplicità si sceglie uno degli andamenti seguenti



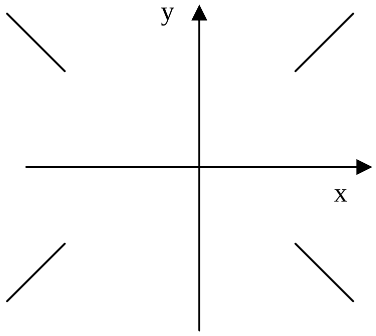
Asintoto verticale — asintoto verticale — asintoto verticale — asintoto verticale

Andamento della funzione all'infinito



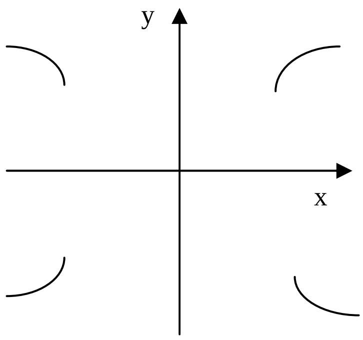
Molteplicità **m>1**: a seconda dei segni indicati sull'asse delle molteplicità si scelgono gli andamenti compatibili .

La curva assume l'andamento tipico di un ramo di parabola avente asse verticale.



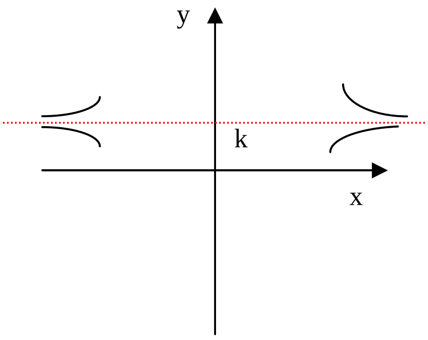
Molteplicità **m=1**: a seconda dei segni indicati sull'asse delle molteplicità si scelgono gli andamenti.
La curva assume un andamento rettilineo, vale a dire tende a confondersi con una retta obliqua y=kx+q
E' semplice calcolare l'inclinazione di questa retta, detta anche asintoto obliquo. E' sufficiente considerare solo, nell'espressione algebrica della funzione, al numeratore il termine di grado massimo complessivo, e lo stesso al denominatore. Il rapporto tra i due coefficienti corrisponde al coefficiente angolare dell'asintoto. Es.

$$y = \frac{x^2(2x+1)}{3x^2 - x - 2} \quad \Rightarrow \frac{2x^3}{3x^2} \quad \Rightarrow \frac{2}{3} \quad = \mathrm{k}$$

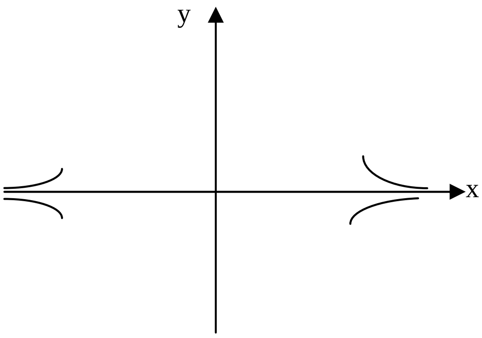


Molteplicità **0<m<1**: a seconda dei segni indicati sull'asse delle molteplicità si scelgono gli andamenti compatibili .

La curva cresce o decresce con una certa lentezza. Si può illustrare osservando la crescita della funzione $y = \sqrt{x}$.
L'andamento è tipico dei rami di una parabola avente asse orizzontale.



Molteplicità **m=0**
La curva si stabilizza lungo una retta orizzontale di equazione y=k detta asintoto orizzontale. Il valore di k si ricava come nel caso (m=1) facendo il rapporto dei termini di grado massimo complessivo sia al numeratore che al denominatore. I segni sull'asse delle molteplicità non danno informazioni utili su quali siano i rami da scegliere (se quelli al di sopra o al di sotto dell'asintoto): la scelta va fatta, in un primo momento, in base a considerazioni di semplicità.

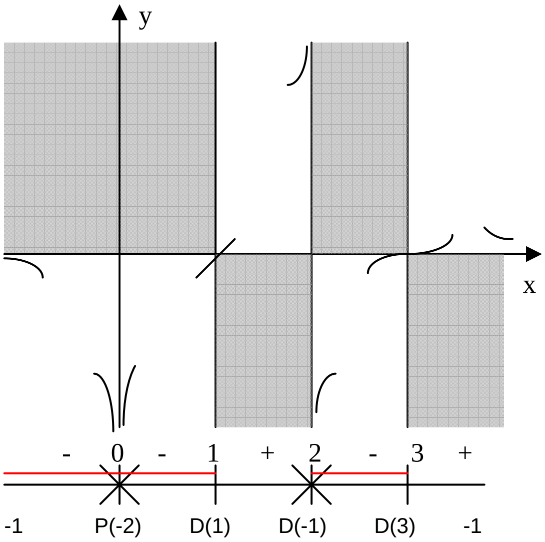


Molteplicità **m<0**: a seconda dei segni indicati sull'asse delle molteplicità si scelgono gli andamenti compatibili .

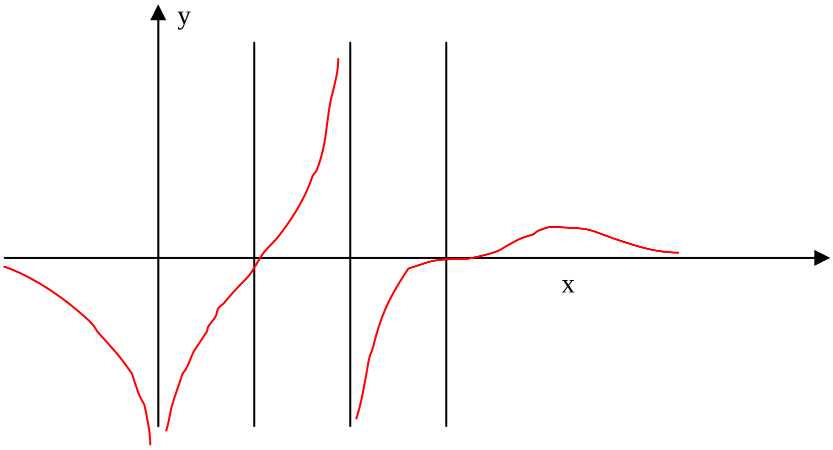
La curva si stabilizza lungo l'asse x, che viene appunto detto asintoto orizzontale.

Completiamo lo studio della funzione proposta $y = \dfrac{(x-1)(3-x)}{x^2(2-x)}$.

Aggiungiamo in corrispondenza dei punti limite e degli infiniti gli andamenti calcolati con le regole precedenti: otterremo il grafico seguente.



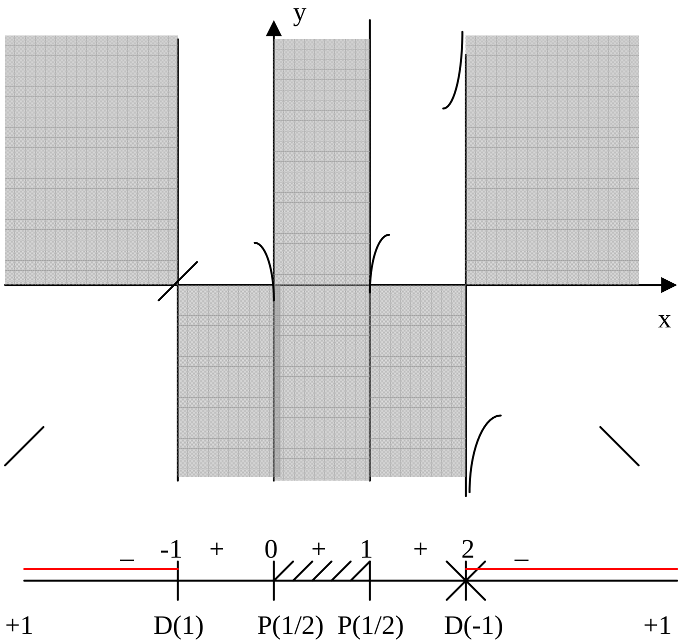
Siamo giunti alla fine della rappresentazione. Ricordandoci le proprietà delle funzioni non resta che unire, nel modo più semplice possibile, gli andamenti già fissati sul piano, ottenendo quello che si definisce grafico preliminare della funzione.



$$y = \frac{(x+1)\sqrt{x^2 - x}}{2-x}$$

L'asse delle molteplicità è rappresentato sotto il piano cartesiano. Seguiamone l'interpretazione

a) Nell'intervallo 0<x<1 la funzione non esiste. L'intera zona può essere eliminata
b) Negli intervalli x<-1 e x>2 la funzione è negativa: è possibile eliminare le zone positive del piano cartesiano
c) Negli intervalli –1<x<0 e 1<x<2 la funzione è positiva: è possibile eliminare le zone negative del piano.
d) La molteplicità all'infinito vale +1: la funzione ha un andamento rettilineo
e) Nel punto di ascissa –1 la funzione ha molteplicità +1 (attraversamento standard)
f) Nei punti di ascissa 0 e 1, nelle zone di esistenza, la molteplicità è ½. Si ha una tangenza verticale
g) Nel punto di ascissa 2 la molteplicità è negativa (asintoto verticale)



Lo studente può provare a tracciare il grafico.