**LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI TERZO GRADO**
**a cura di Antonio Bernardo**

**TARTAGLIA**

## LA STORIA

La storia del rinvenimento della formula risolutiva dell'equazione di terzo grado si sviluppa nella prima metà del 1500. Come tutte le storie, soprattutto quelle in cui sono coinvolte più persone, è piuttosto intricata e difficile da ricostruire. I personaggi sono tutti italiani: Scipione dal Ferro, il suo allievo Antonio Maria Fior, Niccolò Fontana, detto Tartaglia, e Gerolamo Cardano.

La difficoltà storica di attribuire la paternità di una formula è legata alle motivazioni socio-economiche che spingono questi matematici verso la ricerca scientifica. Da un lato c'è l'urgenza di scoprire le leggi della balistica, dall'altro la bravura di un matematico si misura con sfide pubbliche, delle vere e proprie gare di matematica. In entrambi i casi, la scoperta di una formula che permettesse di risolvere i problemi allora in voga era un segreto da custodire gelosamente.

Il 22 febbraio 1535 si tiene una sfida tra Tartaglia e Fior: ciascuno propone all'altro trenta problemi da risolvere nel più breve tempo possibile.

**Alcuni problemi posti da Fior**

-Trovare un numero che, sommato alla sua radice cubica, dia come risultato sei.

-Un ebreo presta un capitale a condizione che alla fine dell'anno gli venga pagata come interesse la radice cubica del capitale. Alla fine dell'anno, l'ebreo riceve ottocento ducati, tra capitale e interessi. Qual era il capitale?

**Alcuni problemi posti da Tartaglia**

-Un vascello sul quale si trovano quindici turchi e quindici cristiani viene colpito da una tempesta e il capitano ordina di gettare fuori bordo la metà dei passeggeri. Per sceglierli si procederà come segue: tutti i passeggeri verranno disposti in cerchio e, cominciando a contare a partire da un certo punto, ogni nono passeggero verrà gettato in mare. In che modo si devono disporre i passeggeri perché solo i turchi siano designati dalla sorte per essere gettati a mare?

-Suddividere un segmento di lunghezza data in tre segmenti con i quali sia possibile costruire un triangolo rettangolo.

-Una botte è piena di vino puro. Ogni giorno se ne attingono due secchi, che vengono sostituiti con due secchi d'acqua. In capo a sei giorni, la botte è piena per metà d'acqua e per metà di vino. Qual era la sua capacità?


CARDANO

Tartaglia risolve rapidamente i problemi di Fior, mentre quest'ultimo non riesce a risolverne nessuno.
Tutti i problemi si risolvevano per mezzo di equazioni di terzo grado; quelli proposti da Fior potevano essere ricondotti tutti all'unico tipo che conosceva di equazione di terzo grado, la cui formula risolutiva gli era stata

rivelata dal suo maestro Scipione dal Ferro. La schiacciante vittoria di Tartaglia dimostrava che questi aveva trovato un metodo per risolvere tutte le equazioni di terzo grado.
La notizia giunge a Cardano, medico, scienziato e astrologo dalla fama internazionale. Cardano cerca di convincere Tartaglia a rivelargli la formula, lo lusinga, lo minaccia, gli fa promesse. Dopo numerose insistenze Tartaglia cede richiedendo che la formula restasse segreta.
Occorre precisare che proprio in questo periodo comincia a svilupparsi il simbolismo matematico del calcolo letterale. I matematici arabi, da cui gli italiani avevano appreso il calcolo algebrico e i metodi per risolvere le equazioni, usavano un linguaggio geometrico, in parte in uso ancora oggi: il cubo, il quadrato, il lato. Per esempio l'equazione $x^3+6x=20$ veniva scritta "il cubo e sei volte il lato è uguale a venti".

Tartaglia invia a Cardano i seguenti versi

| | |
|---|---|
| Quando che 'l cubo con le cose appresso | **$x^3$+px** |
| Se agguaglia a qualche numero discreto: | **=q** |
| Trovami dui altri, differenti in esso; | **u-v = q** |
| Dapoi terrai, questo per consueto, | |
| Che 'l loro produtto, sempre sia eguale | **u·v =** |
| Al terzo cubo delle cose netto; | **$(p/3)^3$** |
| El residuo poi suo generale, | |
| Delli lor lati cubi, ben sottratti | **radcub(u) - radcub(v)** |
| Varrà la tua cosa principale. | **= x** |
| In el secondo, de cotesti atti; | |
| Quando che 'l cubo, restasse lui solo, | |
| Tu osserverai quest'altri contratti, | |
| Del numer farai due tal part' a volo, | |
| Che l' una, in l' altra, si produca schietto, | |
| El terzo cubo delle cose in stolo; | |
| Delle quali poi, per commun precetto. | |
| Terrai li lati cubi, insieme gionti, | |
| El cotal somma, sarà il tuo concetto; | |
| El terzo, poi de questi nostri conti, | |
| Se solve col secondo, se ben guardi | |
| Che per natura son quasi congionti, | |
| Questi trovai, et non con passi tardi | |
| Nel mille cinquecent' e quattro e trenta; | |
| Con fondamenti ben saldi, e gagliardi; | |
| Nella Città del mar 'intorno centa. | |

Nel 1545, contravvenendo alla promessa verso Tartaglia, Cardano pubblica nell'Ars magna la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado. Invece di trattare la formula generale con il complesso linguaggio che ne sarebbe derivato, Cardano affronta un caso particolare, un esempio diremmo oggi, sottintendendo che il metodo si può applicare a qualsiasi caso.

Partiamo dall'equazione $x^3+6x=20$ applicando il procedimento di Tartaglia si ha

1) $u-v=20$

2) $u\cdot v=\frac{216}{27}=8$

sostituendo la 1) nella 2) si ottiene

3) $(20+v)v=8$ da cui $v^2+20v-8=0$

applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado si ha $v_{1,2}=-10\pm\sqrt{108}$, la radice positiva è $v=\sqrt{108}-10$ conseguentemente $u=\sqrt{108}+10$. Infine $x=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

In generale l'equazione $x^3+px=q$ si risolve con la formula $x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2}-\frac{q}{2}}$

(dal sito www.matematicamente.it a cura di Antonio Bernardo)

**LA TECNICA GENERALE**
**a cura del prof. G. Gorni**

Circa quattro millenni fa i babilonesi sapevano risolvere a modo loro l'equazione di secondo grado generale. Sembra che gli antichi amassero riportare le loro equazioni di secondo grado al “problema modello" di trovare due numeri di cui siano noti la somma e il prodotto. E’ facile dimostrare che tali numeri sono esattamente le due soluzioni dell'equazione di secondo grado $z^2 - somma \cdot z + prodotto = 0$
Teniamo a mente questo fatto elementare perché ci servirà nel seguito.
Quando nell’Antichità e nel Medio Evo si incontravano equazioni di grado superiore al secondo, venivano risolte con metodi approssimati (lo si fa tuttora). Per quanto ne sappiamo però nessuno sapeva risolvere le equazioni generali di grado > 2 in maniera esatta con formule che ricordassero quelle risolutive dell'equazione di secondo grado, ossia che contenessero un numero finito di +;-; x;/ ed estrazioni di radice $\sqrt[n]{\ }$.
Nel 1545 colpo di scena. Gerolamo Cardano (1501-1576) pubblica nella sua opera *Ars Magna* il metodo risolutivo per le equazioni di terzo e di quarto grado. Cardano racconta che l'idea per il terzo grado gli era stata data da Nicolò Fontana, detto Tartaglia (~1500-1557), omettendo però che Cardano si era impegnato a non divulgarla. Per il quarto grado, la soluzione era stata trovata da Ludovico Ferrari (1522-1565), collaboratore di Cardano. In quanto a Tartaglia, lo sprone a studiare il problema sembra fosse stata la notizia che un certo Antonio Maria Fior (?-?) conosceva la soluzione, per averla avuta a sua volta dal suo maestro Scipione Del Ferro (~1465-1526), nessuno dei quali l'aveva resa pubblica.
Ci fu una disfida matematica fra Tartaglia e Fior, ognuno dei quali propose all'altro dieci equazioni da risolvere entro un giorno fissato. Il punteggio finale fu dieci a zero in favore di Tartaglia.
Pare che Fior mancasse del trucchetto per ridurre l'equazione generale (il coefficiente di $x^3$ si può sempre supporre 1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ al tipo che lui sapeva (più o meno) risolvere: $y^3 + py + q = 0$. Basta il cambio di variabile $x = y - \frac{a}{3}$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow y^3 + py + q = 0,\ dove\ y = x + \frac{a}{3}\ e \begin{cases} p = -\dfrac{a^3}{3} + b \\ q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c \end{cases}$$

(sostituire per credere). La formula $x = y - \frac{a}{3}$ è meno misteriosa di quanto può sembrare. Data un'equazione di grado n e primo coefficiente 1, $x^n + ax^{n-1} + ... = 0$, il coefficiente a di $x^{n-1}$ è l'opposto della somma delle radici. Poiché le radici sono tre, $\frac{a}{3}$ è il baricentro delle radici. Il cambio di coordinate $x = y - \frac{a}{3}$ è una traslazione che porta l'origine a coincidere con tale baricentro. Il nuovo coefficiente sarà la nuova somma delle radici, che deve essere zero, perché il nuovo baricentro è l'origine.

Ci siamo riportati ad una equazione senza il termine quadratico: $y^3 + py + q = 0$
Per motivi imperscrutabili, decidiamo di cercare la soluzione y come somma di due numeri u e v: $y = u + v$.
Sostituendo:

$$0 = y^3 + py + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q =$$
$$= \underbrace{(u^3 + v^3 + q)} + (u+v)\underbrace{(3uv + p)}$$

Questa è una equazione in due variabili. Fissato per esempio u, è di terzo grado in v, ed equivale in difficoltà al problema di partenza (anzi, il termine quadratico è resuscitato). Il miracolo è che c'è una particolare combinazione di u; v che si può calcolare con mezzi elementari. La si trova imponendo che u e v annullino i termini compresi nelle graffe, ossia

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Vedremo fra poco come si risolve questo sistema. Soffermiamoci solo a verificare l'equivalenza fra la nostra equazione ed il sistema:

$$y^3 + py + q = 0 \Leftrightarrow \exists u, v : \begin{cases} u + v = y \\ u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Procediamo ora alla soluzione del sistema in u; v. Eleviamo al cubo la seconda equazione:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

(ATTENZIONE: vale solo la freccia $\Rightarrow$). Dunque di $u^3$ $e$ $v^3$ conosciamo la somma e il prodotto. Ne traiamo che (basta ricordare i problemi sulle equazioni di secondo grado, determinare due numeri conoscendo somma e prodotto)

$$\{u^3, v^3\} = \left\{ z : z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \right\}$$

L'equazione in z è presto risolta:

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

di slancio scriviamo

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\ , \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

da cui, estraendo le radici cubiche e ricordando che y = u + v, si ha

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e questa è la celebre **Formula Risolutiva** delle equazioni di terzo grado.

Ma se il risultato è così semplice, perché non lo si insegna nelle scuole superiori? La risposta è che la formula non può essere interpretata correttamente senza i numeri complessi, la trigonometria e soprattutto la logica.

Per cominciare, quando scriviamo $+\sqrt{\ }$ e $-\sqrt{\ }$ nelle formule per $u^3$ e $v^3$ intendiamo che le due radici quadrate complesse del radicando vanno poste una per $u^3$ e una per $v^3$. Soltanto quando il radicando è reale e $\geq 0$ si dà un senso univoco al segno di radice quadrata. E' indifferente poi quale delle due radici si assegna ad u $u^3$ e quale rimane a $v^3$, perché tutto è simmetrico in u; v. Ciò che inganna di più nella formula risolutiva sono le radici cubiche. Risolvendo $u^3$ = tot e $v^3$ = tot abbiamo tre radici cubiche complesse per u e tre per v. Quindi il sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

ha in genere nove soluzioni (avremmo diciotto soluzioni se contassimo come diverse le coppie-soluzione (u; v) in cui u e v si scambiano di posto; ma ai fini della somma y = u+v le possiamo considerare indistinte). Sappiamo per altre vie che l'equazione di terzo grado ha tre soluzioni y. Il problema nasce con il passaggio non reversibile $\Rightarrow$ quando abbiamo elevato al cubo. Va precisato che le soluzioni di $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$

sono quelle soluzioni (e solo quelle) di

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

che verificano l'ulteriore soluzione $uv = -\dfrac{p}{3}$ .

In altre parole nella formula risolutiva vanno scelte solo quelle combinazioni di radici cubiche il cui prodotto sia $-p/3$ . Vanno scartate le altre.

In linea di principio il problema è risolto: basta scrivere tutte le nove combinazioni di radici cubiche e poi verificarne i prodotti una ad una.

### Discussione del caso di coefficienti reali

Se l'equazione di partenza è a coefficienti reali, allora è cruciale il segno del

discriminante = $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$

Facciamo una discussione dettagliata dei due casi: $\Delta \geq 0$ e $\Delta < 0$.

### Primo caso: $\Delta \geq 0$

Se il discriminante è non negativo, allora il radicando delle radici cubiche è reale, e fra tutti i radicali cubici ce n'è uno solo reale. Se scelgo il radicale reale per u, la relazione uv = -p/3 assegna un numero pure reale per v, che corrisponde necessariamente al radicale cubico reale per v. Nel caso $\Delta \geq 0$ la formula risolutiva quindi fornisce una soluzione reale dell'equazione qualora tutti i radicali siano interpretati nel senso reale stretto.
Se vogliamo le altre due radici dobbiamo tirare in ballo i radicali complessi: questi sono il prodotto del radicale reale per le due radici cubiche non reali dell'unità $\cos(\frac{2\pi}{3}) \pm i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}},\ u_2 = u_1(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}),\ u_3 = u_1(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},\ v_2 = v_1(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}),\ v_3 = v_1(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Se $u_1 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$ , invece di verificare uv = -p/3, fortuna vuole che ci basti trovare quando $uv \in \Re$ . Infatti questo succede esattamente in tre casi. Nella tabella seguente, "sì" e "no" sono le risposte alla domanda $uv \in \Re$ ?

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | sì | no | no |
| $u_2$ | no | no | sì |
| $u_3$ | no | sì | no |

La conclusione è che per avere le due soluzioni complesse coniugate bisogna e basta scegliere segni opposti per u e v nelle parti immaginarie. Nel caso speciale in cui $u_1$ o $v_1$ è nullo, lo è anche p e pertanto la relazione uv = -p/3 è soddisfatta da tutte le combinazioni.

**Secondo caso:** $\Delta < 0$

Il discriminante negativo è il caso più rognoso. Per cominciare, i radicandi cubici

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\Delta}$$

sono complessi coniugati aventi come modulo R il valore

$$R = \sqrt{(-\frac{q}{2})^2 + (\sqrt{-\Delta})^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

(si noti che se $\Delta < 0$ anche p<0 cosicché quest'ultimo radicale è reale) e come argomento un angolo

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-\Delta}}{-\frac{q}{2}}$$

E' opportuno indicare i numeri complessi come coppie modulo-argomento (rappresentazione goniometrica o esponenziale). I valori di $u^3$ e $v^3$ sono

$$u^3 = (R, \vartheta), \qquad v^3 = (R, -\vartheta)$$

per cui le radici cubiche sono

$$u_1 = (\sqrt[3]{R}, \frac{\vartheta}{3}), \qquad u_2 = (\sqrt[3]{R}, \frac{\vartheta + 2\pi}{3}), \qquad u_3 = (\sqrt[3]{R}, \frac{\vartheta + 4\pi}{3})$$

$$u_1 = (\sqrt[3]{R}, \frac{-\vartheta}{3}), \qquad u_2 = (\sqrt[3]{R}, \frac{-\vartheta + 2\pi}{3}), \qquad u_3 = (\sqrt[3]{R}, \frac{-\vartheta + 4\pi}{3})$$

Come sempre bisogna scegliere le combinazioni $\{u, v\}$ che soddisfano uv = -p/3. In particolare, bisogna che il prodotto sia reale, ossia che gli argomenti abbiano somma nulla (o multipla di $2\pi$). La tabella è identica a quella del caso $\Delta > 0$ e non la riscriviamo. Vanno bene le tre coppie $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_3\}$, in ciascuna delle quali conviene osservare che u e v sono fra loro coniugati.
Le tre coppie forniscono tre soluzioni y = u + v tutte reali, perché la somma (oltre che il prodotto) di due numeri complessi coniugati è reale (più precisamente $z + \bar{z} = 2R(z)$, dove R(z) indica la parte reale di z). Possiamo scrivere una tavola con le soluzioni espresse in termini reali:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2R(u_1) - 2R(v_1) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3}$$

$$y_2 = u_2 + v_3 = 2R(u_2) - 2R(v_3) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta + 2\pi}{3}$$

$$y_3 = u_3 + v_2 = 2R(u_3) - 2R(v_2) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta + 4\pi}{3}$$

Si lascia per esercizio di verificare che $\vartheta$ non è un multiplo di $\pi$ e di dedurne che le tre radici sono distinte.
Conclusione: se il discriminante è negativo, per trovare le tre radici (che sono reali e distinte) bisogna dapprima calcolare l'angolo $\vartheta$, e poi applicare le formule. In quanto a $\vartheta$, una volta che ne è nota la tangente, basta sapere in che quadrante è per determinarlo completamente:

a) se –q/2 > 0 allora siamo nel I-IV quadrante, e $\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{-\Delta}}{q}$

b) se –q/2 < 0 allora siamo nel II-III quadrante, e $\vartheta = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{-\Delta}}{q}$

**Curiosità.** Ci si può chiedere se esista una formula che fa passare dalle funzioni trigonometriche di $\vartheta$ a quelle di $\vartheta$/3 senza passare attraverso il calcolo di $\vartheta$, così come si può fare per $\vartheta$/2.

La risposta è che non è possibile farlo tramite una combinazione finita di +;-; x;/ ed estrazioni di radice $\sqrt[n]{\ }$.

C'è di mezzo il classico problema della trisezione dell'angolo con riga e compasso, problema che è stato dimostrato (in generale) insolubile. Per trovare esattamente le tre soluzioni reali nel caso $\Delta$ < 0 evitando i numeri complessi, ci tocca passare per le funzioni trigonometriche inverse. Si capirà ora perché la formula di Cardano non è adatta ad un corso elementare di algebra.

(L'autore di queste pagine è il prof. G. Gorni. L'articolo è un suo lavoro tratto da Internet)

**LA TECNICA GENERALE APPLICATA A DUE ESEMPI + UNA SCOPERTA FONDAMENTALE**
**a cura di Torchitti Angelo**

Rivediamo la tecnica generale di soluzione attraverso un paio di esempi.

1) Risolvere l'equazione $x^3 - 6x + 9 = 0$

L'equazione è già scritta nella forma ridotta. Il procedimento risolutivo generale consiste nel vedere la soluzione nella forma y=u+v. La sostituzione porta alle equazioni

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} \ ,$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$$

Calcoliamo quindi i termini fondamentali per la discussione:

$$p = -6$$
$$q = 9$$
$$-\frac{q}{2} = -\frac{9}{2}$$
$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4}$$

e quindi

$$u = \sqrt[3]{-1}, \qquad v = \sqrt[3]{-8}$$

Siamo nel caso più semplice, $\Delta > 0$, l'equazione ammette una soluzione reale e due complesse. Se fossimo interessati alla sola soluzione reale otterremmo $u = -1,\ v = -2,\ x = u + v = -3$ e il problema sarebbe risolto. Se fossimo interessati a tutte le soluzioni il procedimento sarebbe più complesso. Bisogna ricordare infatti che una radice cubica ha tre soluzioni nel campo dei numeri complessi e quindi otterremo tre valori per u e tre per v:

$$u_1 = -1, \qquad v_1 = -2,$$
$$u_2 = u_1(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad v_2 = v_1(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3}$$
$$u_3 = u_1(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = +\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad v_3 = v_1(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$$

e, ricordando la tabella delle soluzioni,

$$x_1 = u_1 + v_1 = -1 - 2 = -3$$
$$x_2 = u_2 + v_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x_3 = u_3 + v_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - i\sqrt{3} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Risolvere l'equazione $x^3 - 6x + 4 = 0$

L'equazione è già scritta nella forma ridotta. Il procedimento risolutivo generale consiste nel vedere la soluzione nella forma y=u+v. La sostituzione porta alle equazioni

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} \ ,$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$$

Calcoliamo quindi i termini fondamentali per la discussione:

$$p = -6$$
$$q = 4$$
$$-\frac{q}{2} = -2$$
$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -4$$

Siamo nel caso **più complesso**! **Tre** soluzioni **reali**! (il bisticcio tra le parole è divertente). Le soluzioni passano sempre dal calcolo di $u^3 e\, v^3$.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta} = -2 + 2i \qquad e \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta} = -\frac{q}{2} - i\sqrt{-\Delta} = -2 - 2i$$

ovvero

$$u = \sqrt[3]{-2+2i} \qquad v = \sqrt[3]{-2-2i,}$$

Indichiamo $u^3 e\, v^3$ come coppia (modulo; argomento).

$R_{u^3}$ = Modulo di $u^3 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8}$

$\vartheta_{u^3}$ = Argomento di $u^3 = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}(-1) = -45 + k180$ , $-\frac{q}{2} < 0$ siamo nel **II-III** quadrante, quindi $\vartheta$ =135°

$R_{v^3}$ = Modulo di $v^3 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8}$

$\vartheta_{v^3}$ = Argomento di $v^3 = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} = \mathrm{arctg}(1) = 45 + k180$ , $-\frac{q}{2} < 0$ siamo nel **II-III** quadrante, quindi $\vartheta$ =225°

Le soluzioni per u e v sono quindi

$$u_1 = (\sqrt[3]{\sqrt{8}}, 45°) = (\sqrt{2}, 45°), \qquad u_2 = (\sqrt{2}, 165°), \qquad u_3 = (\sqrt{2}, 285°)$$
$$v_1 = (\sqrt{2}, 75°) \qquad v_2 = (\sqrt{2}, 195°), \qquad v_3 = (\sqrt{2}, 315°)$$

o meglio ancora, visto che il prof. Gorni ha fatto i calcoli per noi,

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2R(u_1) - 2R(v_1) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3} = 2\sqrt{2}\cos(45°) = 2$$
$$y_2 = u_2 + v_3 = 2R(u_2) - 2R(v_3) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta + 2\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos(165°)$$
$$y_3 = u_3 + v_2 = 2R(u_3) - 2R(v_2) = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta + 4\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos(285°)$$

E con delle buone tavole si ottengono i valori esatti.

3) Risolvere l'equazione $x^3 - 2x - 4 = 0$

Calcoliamo i termini fondamentali per la discussione:

$$p=-2$$
$$q=-4$$
$$-\frac{q}{2}=2$$
$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{100}{27}$$

Poiché $\Delta > 0$ abbiamo una soluzione reale e due complesse. La soluzione reale può scriversi direttamente con la formula di Cardano:

$$x=\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}$$

Ma a questo punto c'è una cosa davvero strabiliante che si può concludere. L'equazione proposta può risolversi anche scomponendo il trinomio assegnato col metodo di Ruffini. In questo modo si ottiene l'unica soluzione reale x=2.
Pertanto

$$2=\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}$$

che è un risultato spettacolare (usare la calcolatrice o un computer per crederci) e allo stesso tempo sconfortante (quante cose non sappiamo sul numero 2?)
Domanda: esistono altre rappresentazioni di 2 come somma di die radici cubiche? Siamo capaci di calcolarne alcune?